



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

POLINOMIOS ORTOGONALES CONFLUENTES MATRICIALES

Seminario de Investigación para obtener el título de
**Licenciada en Ciencias Básicas con Orientación en
Matemática**

Analía Victoria Torres

2017

Directora: Lic. Valeria Yanina González

Agradecimientos

Mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que directa o indirectamente han colaborado en la realización de este trabajo.

A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y a los profesores que contribuyeron a mi formación profesional. En especial a Sebastián Simondi por aceptarme en su grupo de investigación, y a mi directora Yanina González, ya que sin su guía y exigencia este trabajo no sería tal.

A mi familia, porque formaron mi moral.

A mis amigos, por su aliento en las situaciones adversas.

A todos ellos, muchas gracias.

Resumen

El presente trabajo se enmarca en la teoría de polinomios ortogonales matriciales que satisfacen una ecuación diferencial de tipo hipergeométrico.

Debido a la no conmutatividad de matrices y a la existencia de matrices singulares, en esta teoría surgen interesantes fenómenos ausentes en el caso de los polinomios ortogonales clásicos. Mientras que en éste sólo existen tres familias distintas que son ortogonales respecto a un peso positivo, en el caso matricial la cantidad de familias es infinita. Además, esta teoría se caracteriza por la existencia de varias familias distintas de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de un mismo operador diferencial de segundo orden, o de varios operadores diferenciales de segundo orden que tienen a una misma familia de polinomios ortogonales matriciales como autofunción [53].

El objetivo de este trabajo consistió en encontrar familias de polinomios ortogonales mónicos matriciales $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de tamaño 2×2 , que son autofunciones del operador hipergeométrico confluyente matricial

$$D = x \frac{d^2}{dx^2} + (C - xI) \frac{d}{dx} - V, \quad (1)$$

es decir,

$$DP_n = P_n \Delta_n \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

donde Δ_n es un autovalor diagonal y $C, V \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Para ello se requirió el abordaje de conceptos y resultados de las funciones hipergeométricas matriciales, en base a su antecedente clásico.

En primer lugar, el estudio se centró en la búsqueda y definición de las condiciones necesarias que deben cumplir los coeficientes del operador diferencial (1) para que toda autofunción sea una familia de polinomios matriciales mónicos. Para esto, consideramos las expresiones en series de potencia introducidas por S. Simondi y P. Román en [71]. A través del análisis de los dos casos posibles para el coeficiente n -ésimo de dichas series -que sea inversible o no-, encontramos que en el primer caso, las familias obtenidas reducen al caso clásico. En cambio, cuando dicho coeficiente es no inversible, la cantidad de familias nuevas es infinita. Al analizar el problema desde diferentes perspectivas, utilizando la teoría desarrollada en [29, 52, 57], se determinó que dichas familias de autofunciones polinomiales son ortogonales respecto a un peso matricial.

Con estos resultados se pretende avanzar un paso más hacia la consecución de teoremas de clasificación como el de Bochner para las familias clásicas.

Introducción

A modo de breve reseña y con el propósito de ubicarnos en el marco histórico de esta teoría, mencionaremos que fue en los albores del siglo XVIII cuando se comenzó a desarrollar el estudio de las funciones especiales y los polinomios ortogonales en relación con sus aplicaciones a la física.

La primera familia de polinomios ortogonales fue introducida en 1785 por A. M. Legendre a partir del estudio de la atracción de un cuerpo por una esfera. Por su parte, P. S. Laplace encontró su relación con funciones esféricas en el estudio del movimiento planetario.

Más adelante, en 1826, K. G. J. Jacobi introdujo una familia de polinomios ortogonales expresados a partir de la función hipergeométrica de Gauss, que generaliza a los polinomios de Legendre.

La siguiente familia fue definida por P. S. Laplace en 1810 como aplicación a la teoría de probabilidades. P. L. Chebyshev estudió estos polinomios en detalle. Sin embargo, se nombraron luego de la publicación de C. Hermite en 1864.

La última de las llamadas familias clásicas fue dada por E. N. Laguerre en 1879, al buscar una solución para la integral $\int_x^\infty e^{-t}t^{-1}dt$ desarrollada en fracciones continuas. Luego, fueron generalizados N. Y. Sonin. Los polinomios de Laguerre surgen en la mecánica cuántica, en la parte radial de la solución de la ecuación de Schrödinger para un átomo con un electrón. También describen las funciones estáticas de Wigner de los sistemas osciladores en la mecánica cuántica en el espacio de fase. Entran, además, en la mecánica cuántica del potencial Morse y del oscilador armónico isotrópico 3D.

Lo que hoy conocemos como teorema de Favard fue introducido en 1935 por J. Favard, aunque en esencia el teorema había sido usado por Stieltjes en la teoría de las fracciones continuas muchos años antes del paper de Favard y fue redescubierto varias veces por otros autores antes de su trabajo.

La teoría general de polinomios ortogonales tuvo como pioneros a T. S. Stieltjes y P. L. Chebyshev, y se consolidó en 1939 con la monografía de Gabor Szegő *Orthogonal Polynomials* [76].

Todas estas familias de polinomios ortogonales resultaron tener propiedades interesantes en común, en particular, todas son autofunciones de un operador diferencial de segundo orden de la forma:

$$d = \sigma(t) \frac{d^2}{dt^2} + \tau(t) \frac{d}{dt} + \lambda,$$

donde σ y τ son polinomios de grado a lo sumo 2 y 1, respectivamente, y $\lambda \in \mathbb{C}$. Esta propiedad caracteriza a las familias de polinomios de Jacobi, Hermite y Laguerre, como fue probado por S. Bochner en 1929, al buscar para cuáles funciones de peso existen operadores diferenciales de segundo orden que tienen como autofunción una sucesión de polinomios ortogonales. Los resultados obtenidos se encuentran en [5] y se pueden resumir en la siguiente tabla:

Ecuación Diferencial	Autofunción
$y'' + (\delta + \epsilon x)y' + \lambda y = 0$	Polinomios de Hermite
$xy'' + (\delta + \epsilon x)y' + \lambda y = 0$	Polinomios de Laguerre
$x(1-x)y'' + (\delta + \epsilon x)y' + \lambda y = 0$	Polinomios de Jacobi

Otra caracterización fue dada por Sonin en 1887, quien probó que las únicas familias de polinomios ortogonales cuyas derivadas son también ortogonales son las familias de Jacobi, Hermite y Laguerre.

Una tercera caracterización fue propuesta por F. Tricomi, en la cual estas familias pueden expresarse en términos de una fórmula de Rodrigues

$$p_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\sigma^n(x)\rho(x)),$$

donde $\rho(x)$ es el peso respecto al cual la sucesión de polinomios es ortogonal.

Los polinomios ortogonales clásicos tienen la ventaja de que pueden expresarse en términos de funciones hipergeométricas. La más destacada es la función hipergeométrica ${}_2F_1$, que se representa en términos de la serie hipergeométrica. El nombre fue acuñado por J. Wallis en 1656 [81] y fue objeto de posterior estudio por L. Euler. Sin embargo, habría que esperar hasta el año 1812 para su primer tratamiento sistemático por parte de C. F. Gauss.

Los estudios realizados por E. Kummer en 1836 y por B. Riemann en 1857, condujeron a una caracterización fundamental de la función hipergeométrica por medio de la ecuación diferencial que satisface. Riemann mostró que dicha ecuación en el plano complejo puede caracterizarse por sus tres singularidades regulares y que, además, toda ecuación diferencial de segundo orden con tres singularidades regulares puede convertirse en la ecuación diferencial hipergeométrica por medio de un cambio de variables.

En años sucesivos, las miles de identidades descubiertas para la función hipergeométrica fueron compiladas por H. Bateman [2], M. Abramowitz e I. Stegun [1].

Otra de las funciones especiales importantes para este trabajo es la función hipergeométrica confluyente ${}_1F_1$, una forma degenerada de la función hipergeométrica de Gauss, donde dos de sus tres puntos singulares regulares confluyen a una singularidad irregular. Existen varias formas de funciones hipergeométricas confluentes, que son esencialmente las mismas y difieren unas de otras por funciones elementales y cambios de variables:

- Función de Kummer $M(a, b, z)$, introducida en 1837 por E. Kummer y que es solución de la ecuación diferencial de Kummer.
- Función de Tricomi $U(a, b, z)$, introducida por F. Tricomi en 1947, también denotada por $\Psi(a; b; z)$, y que es otra solución de la ecuación de Kummer.
- Funciones de Whittaker, que son soluciones de la ecuación que lleva su nombre.
- Funciones de onda de Coulomb, que son soluciones de la ecuación de onda de Coulomb.

La función hipergeométrica se puede generalizar como ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q, z)$. La primera notación de estas funciones fue introducida por Pochhammer en 1870 y modificada por Barnes [73].

En resumidas cuentas, de lo anterior descrito se deduce la definición de polinomios ortogonales clásicos, es decir, familias que

- (i) pueden expresarse en términos de una fórmula de Rodrigues,

- (ii) son autofunciones de una ecuación diferencial de tipo hipergeométrico,
- (iii) verifican una relación de recurrencia y
- (iv) sus derivadas forman también una familia de polinomios ortogonales.

Los polinomios ortogonales matriciales fueron introducidos por M. G. Krein en 1949 [59, 60]. También fueron estudiados por Ju. Berezans'kiĭ [4] y J. S. Geronimo [49] en relación a la teoría de dispersión. Sin embargo, los trabajos sobre la teoría de polinomios ortogonales matriciales fueron esporádicos. Este hecho se revirtió en las últimas décadas, con la aparición de los primeros ejemplos de polinomios ortogonales matriciales no triviales que son autofunciones de operadores diferenciales. Esto permitió elaborar un conocimiento sólido y estructurado de esta teoría.

Durante los últimos 20 años se han estudiado propiedades que extienden los resultados del caso escalar, tales como fórmula de recurrencia, el teorema de Favard [20, 21, 46], propiedades asintóticas [17, 18, 24, 43, 83, 84], aspectos algebraicos, propiedades de ceros, fórmulas de cuadratura gaussiana [19, 25, 39, 44, 45, 74] o problemas de densidad y de momentos matriciales [40–42, 63, 64].

Debido a la importancia de las familias clásicas de Hermite, Laguerre y Jacobi, uno puede preguntarse qué familias de polinomios ortogonales matriciales $\{P_n(x)\}$ son autofunciones de un operador diferencial de segundo orden de la forma

$$D = A_2 \frac{d^2}{dx^2} + A_1 \frac{d}{dx} + A_0, \quad (2)$$

es decir,

$$DP_n = P_n \Delta_n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad (3)$$

donde A_i son polinomios matriciales independientes de n de grado a lo sumo i , y el autovalor Δ_n no depende de x .

Este problema fue planteado por A. Durán en 1997 [26], pero no ha sido hasta muy recientemente cuando se han encontrado las primeras familias de polinomios ortogonales matriciales que satisfacen la ecuación (3) y para las cuales el peso matricial no es equivalente a una colección diagonal de pesos escalares. Resultados al respecto pueden encontrarse en [6, 9, 12–14, 25–38, 50, 53, 55, 57, 67, 68]. Se han desarrollado nuevos e innovadores métodos para encontrar estas familias, pero se necesitarán otros para lograr teoremas de clasificación como el de Bochner para las familias clásicas.

En los últimos años se han desarrollado principalmente dos métodos para encontrar ejemplos de familias de polinomios ortogonales matriciales que verifican ecuaciones diferenciales del tipo (3):

1. Resolviendo un conjunto de ecuaciones diferenciales matriciales con ciertas condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} WA_2 &= A_2^* W, \\ 2(WA_2)' &= A_1^* W + WA_1, \\ (WA_2)'' - (WA_1)' + WA_0 &= A_0^* W, \end{aligned}$$

donde W es el peso matricial y A_i son los coeficientes del operador diferencial (2) [29–32, 38, 55].

2. Recurriendo a técnicas de la teoría de representación de grupos para la obtención de funciones esféricas matriciales asociadas al espacio proyectivo complejo $P_n(\mathbb{C}) = SU(n+1)/U(n)$ [51, 53–56, 58, 67, 68, 80].

En este seminario se presenta un método que nos permite calcular las familias de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de un operador diferencial hipergeométrico confluyente

2×2 . Además, determinamos condiciones necesarias sobre los parámetros del operador diferencial para que sus autofunciones con autovalor diagonal sean polinomios matriciales mónicos 2×2 .

El presente trabajo se encuentra estructurado en tres capítulos y un apéndice.

En el capítulo 1 se enuncian definiciones y resultados básicos sobre la Función Hipergeométrica de Gauss, la Función Hipergeométrica Confluente y la teoría de Polinomios Ortogonales Clásicos.

En el capítulo 2 se muestra una generalización de los resultados del capítulo anterior para el caso matricial, es decir, definiciones y propiedades sobre la Función Hipergeométrica Matricial ${}_2H_1$ introducida por J. Tirao en [77], la Función Hipergeométrica Confluente Matricial, que es un caso particular de las Funciones Hipergeométricas Generalizadas estudiadas por S. Simondi y P. Román [71], y los Polinomios Ortogonales Matriciales.

Finalmente, en el capítulo 3 se desarrolla el aporte principal de este trabajo presentando resultados inéditos. Allí se describe un procedimiento para hallar familias de polinomios matriciales mónicos, autofunciones de un operador diferencial de tipo confluente que son ortogonales respecto a un peso matricial.

Índice general

1. Caso Clásico	1
1.1. Función Hipergeométrica de Gauss	1
1.2. Función Hipergeométrica Confluente	10
1.3. Polinomios Ortogonales Clásicos	15
1.4. Polinomios de Laguerre	24
2. Caso Matricial	29
2.1. Función Hipergeométrica Matricial	29
2.2. Función Hipergeométrica Confluente Matricial	29
2.3. Polinomios Ortogonales Matriciales	30
2.4. Ad-Conditions	36
3. Polinomios Confluentes Matriciales	38
3.1. Familias únicas de autofunciones	40
3.2. Familias no únicas de autofunciones	44
A. Familias no únicas	62
Nomenclatura	86
Bibliografía	86

Capítulo 1

Caso Clásico

En este capítulo introduciremos el concepto de función hipergeométrica gaussiana, definida por Gauss en 1812, y de función hipergeométrica confluyente, la cual es una forma degenerada de la anterior. Aquí también desarrollaremos las principales propiedades de los polinomios ortogonales clásicos.

1.1. Función Hipergeométrica de Gauss

Este nombre fue utilizado por primera vez por Wallis en 1655, quien se lo adjudicó a la serie cuyo n -ésimo término es

$$a(a+b)(a+2b)\dots[a+(n-1)b].$$

Euler también lo usó en este sentido. Pero el uso moderno de este nombre aparentemente se debe a Kummer [61].

La ecuación hipergeométrica fue estudiada por Euler [47], Gauss [48] y Riemman [70], entre otros. Se estima que tanto la ecuación hipergeométrica como su solución en serie fue escrita primero por Euler en un manuscrito de 1778 y publicada en 1794. Riemann estudió la ecuación diferencial de tipo hipergeométrico a partir de sus tres puntos singulares regulares y, mediante seis transformaciones conformes, obtuvo las 24 soluciones conocidas como soluciones de Kummer.

Desde entonces, muchos otros han encontrado generalizaciones y aplicaciones en la física, ingeniería y estadística, ya que toda ecuación diferencial de segundo orden con tres puntos singulares regulares puede transformarse en la ecuación diferencial hipergeométrica. Este resultado puede profundizarse en [10, 66].

Definición 1.1.1. Para $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \notin -\mathbb{N}_0$ y $z \in \mathbb{C}$ definimos la función hipergeométrica de Gauss como

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!},$$

donde $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ es el símbolo de Pochhammer y Γ es la función Gamma definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Observación. Notemos que ${}_2F_1(a, b, c; z) = {}_2F_1(b, a, c; z)$. Además, si a (o b) es un entero negativo

$-n$, con $n \in \mathbb{N}$, la serie se reduce a un polinomio

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n! (b)_k z^k}{(n-k)! (c)_k k!},$$

ya que, por definición,

$$(-n)_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}, & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

A continuación, analizamos la región de convergencia de esta función.

Proposición 1.1.1. *La función hipergeométrica ${}_2F_1$ converge absolutamente en $|z| < 1$ y diverge absolutamente en $|z| > 1$. Además, si $|z| = 1$, ${}_2F_1(a, b, c; z)$ converge absolutamente para $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$ y diverge para $\operatorname{Re}(c - a - b) \leq 0$.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ y $u_k = \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!}$. Entonces

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1} z^{k+1}}{(c)_{k+1} (k+1)!}}{\frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!}} = \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)(k+1)} z.$$

Consideramos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = |z| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)(k+1)} \right| = |z|.$$

Por el criterio de D'Alembert la serie converge absolutamente en $|z| < 1$ y diverge en $|z| > 1$.

Supongamos ahora que $|z| = 1$. En este caso utilizaremos el criterio de Raabe, que establece que dada una serie de términos positivos $\sum u_k$ y constantes C , K y N tales que

$$\frac{u_k}{u_{k+1}} = 1 + \frac{C}{k} + \frac{f(k)}{k^\lambda},$$

donde λ es un índice mayor que 1 y $|f(k)| < K$ para todo $k > N$. Entonces, la serie $\sum u_k$ converge si $C > 1$ y diverge si $C \leq 1$ [8].

Calculamos $\left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right|^2$ y obtenemos el cociente de dos polinomios de cuarto grado P y Q en la variable k :

$$P(k) = k^4 + k^3 (2\operatorname{Re}(c) + 2) + k^2 (|c|^2 + 4\operatorname{Re}(c) + 1) + k (2|c|^2 + 2\operatorname{Re}(c)) + |c|^2,$$

$$Q(k) = k^4 + k^3 (2\operatorname{Re}(a) + 2\operatorname{Re}(b)) + k^2 (|a|^2 + |b|^2 + 4\operatorname{Re}(a)\operatorname{Re}(b)) \\ + k (2\operatorname{Re}(b)|a|^2 + 2\operatorname{Re}(a)|b|^2) + |a|^2 |b|^2,$$

cuyo resto es

$$R(k) = k^3 (2\operatorname{Re}(c) + 2 - 2\operatorname{Re}(a) - 2\operatorname{Re}(b)) + \\ + k^2 (|c|^2 + 4\operatorname{Re}(c) + 1 - |a|^2 - |b|^2 - 4\operatorname{Re}(a)\operatorname{Re}(b)) + \\ + k (2|c|^2 + 2\operatorname{Re}(c) - 2\operatorname{Re}(b)|a|^2 - 2\operatorname{Re}(a)|b|^2) + |c|^2 - |a|^2 |b|^2.$$

Entonces, $\left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right| = \sqrt{1 + \frac{R(k)}{Q(k)}}$. Aproximando la raíz obtenemos

$$\left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right| = 1 + \frac{1}{2} \frac{R(k)}{Q(k)} - \frac{1}{8} \left(\frac{R(k)}{Q(k)} \right)^2 + \dots \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{R(k)}{Q(k)}.$$

Estimamos el cociente $R(k)/Q(k)$:

$$\frac{R(k)}{Q(k)} = 2 \frac{\operatorname{Re}(c) + 1 - \operatorname{Re}(a) - \operatorname{Re}(b)}{k} + \frac{f(k)}{k^2},$$

donde $\frac{f(k)}{k^2} = \frac{R_2(k)}{Q(k)}$ con $R_2(k)$ el resto de $R(k)/Q(k)$.

Entonces

$$\left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right| \simeq 1 + \frac{\operatorname{Re}(c - a - b + 1)}{k} + \frac{f(k)}{k^2}.$$

Como $|f(k)|$ está acotado para k suficientemente grande, por el criterio de Raabe la serie converge en $\operatorname{Re}(c - a - b) + 1 > 1$ y diverge en $\operatorname{Re}(c - a - b) + 1 \leq 1$. Es decir, converge en $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$ y diverge en $\operatorname{Re}(c - a - b) \leq 0$. \square

A continuación presentamos las relaciones de contigüidad para la función hipergeométrica que fueron obtenidas por Gauss en 1812. El término se utiliza para indicar que uno de los parámetros se modifica en ± 1 , es decir, si denotamos $F = {}_2F_1(a, b, c; z)$, sus funciones de contigüidad son $F(a \pm 1) = {}_2F_1(a \pm 1, b, c; z)$, $F(b \pm 1) = {}_2F_1(a, b \pm 1, c; z)$ y $F(c \pm 1) = {}_2F_1(a, b, c \pm 1; z)$.

Proposición 1.1.2. *Las relaciones de Gauss para la función hipergeométrica ${}_2F_1(a, b, c; z)$ son*

- (i) $(c - a - b)F + a(1 - z)F(a + 1) - (c - b)F(b - 1) = 0.$
- (ii) $(c - a - 1)F + aF(a + 1) - (c - 1)F(c - 1) = 0.$
- (iii) $c(1 - z)F - cF(a - 1) + (c - b)zF(c + 1) = 0.$
- (iv) $(c - a - b)F + b(1 - z)F(b + 1) - (c - a)F(a - 1) = 0.$
- (v) $(c - b - 1)F + bF(b + 1) - (c - 1)F(c - 1) = 0.$
- (vi) $c(1 - z)F - cF(b - 1) + (c - a)zF(c + 1) = 0.$
- (vii) $(a - b)F - aF(a + 1) + bF(b + 1) = 0.$
- (viii) $[c - 2a - (b - a)z]F + a(1 - z)F(a + 1) - (c - a)F(a - 1) = 0.$
- (ix) $c[a - (c - b)z]F - ac(1 - z)F(a + 1) + (c - a)(c - b)zF(c + 1) = 0.$
- (x) $(b - a)(1 - z)F - (c - a)F(a - 1) + (c - b)F(b - 1) = 0.$
- (xi) $[a - 1 - (c - b - 1)z]F + (c - a)F(a - 1) - (c - 1)(1 - z)F(c - 1) = 0.$
- (xii) $[c - 2b + (b - a)z]F + b(1 - z)F(b + 1) - (c - b)F(b - 1) = 0.$
- (xiii) $c[b - (c - a)z]F - bc(1 - z)F(b + 1) + (c - a)(c - b)zF(c + 1) = 0.$
- (xiv) $[b - 1 - (c - a - 1)z]F + (c - b)F(b - 1) - (c - 1)(1 - z)F(c - 1) = 0.$
- (xv) $c[c - 1 - (2c - a - b - 1)z]F + (c - a)(c - b)zF(c + 1) - c(c - 1)(1 - z)F(c - 1) = 0.$

Demostración. Probaremos las relaciones (i) y (ii), pues las demás se prueban de manera similar.

(i) Reemplazamos la función hipergeométrica F por su expresión en serie de potencias,

$$(c - a - b)F + a(1 - z)F(a + 1) - (c - b)F(b - 1) = \\ (c - a - b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} + a(1 - z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a + 1)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} - (c - b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b - 1)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (1.1)$$

Utilizando las propiedades de Pochhammer, tenemos que

$$a(a + 1)_k = (a)_k (a + k), \\ (b - 1)_k = \frac{(b)_k (b - 1)}{b - k - 1}.$$

Factorizando, la expresión (1.1) se convierte en

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} k \frac{c + k - 1}{b + k - 1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^{k+1}}{k!} (a + k).$$

Claramente, para $k = 0$ la igualdad se cumple. Para cada potencia $k > 0$ agrupamos los coeficientes de z^k ,

$$\frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{c + k - 1}{(k - 1)! b + k - 1} - \frac{(a)_{k-1} (b)_{k-1}}{(c)_{k-1} (k - 1)!} (a + k - 1).$$

Pero de la definición de Pochhammer tenemos

$$(a)_{k-1} = \frac{(a)_k}{(a + k - 1)}.$$

Entonces, para todo $k > 0$ el coeficiente de z^k es:

$$\frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (k - 1)!} \left[\frac{c + k - 1}{b + k - 1} - \frac{(c + k - 1)(a + k - 1)}{(a + k - 1)(b + k - 1)} \right] = 0.$$

Por lo tanto, (1.1) se anula.

(ii) Sustituimos F por su expresión en series de potencia

$$(c - a - 1)F + aF(a + 1) - (c - 1)F(c - 1) = \\ (c - a - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} + a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a + 1)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} - (c - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c - 1)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

Por propiedad de los coeficientes Pochhammer,

$$a(a + 1)_k = (a)_k (a + k), \\ (c - 1) \frac{1}{(c - 1)_k} = \frac{(c - 1)(c + k - 1)}{(c - 1)(c)_k} = \frac{c + k - 1}{(c)_k}.$$

La expresión anterior factorizada es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} [c - a - 1 + a + k - (c + k - 1)].$$

Pero $c - a - 1 + a + k - (c + k - 1) = 0$. Con lo cual, se demuestra la relación (ii). \square

De ahora en adelante proseguiremos con la notación $F(a, b, c; z) = {}_2F_1(a, b, c; z)$.

Proposición 1.1.3. *La función hipergeométrica tiene la siguiente relación con sus derivadas:*

$$\frac{d^m}{dz^m} F(a, b, c; z) = \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} F(a + m, b + m, c + m; z), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Como $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$ es una serie de potencias que converge absolutamente para $|z| < 1$ y define a la función analítica $F(a, b, c; z)$ para $|z| < 1$, entonces, converge uniformemente en compactos contenidos en $|z| < 1$. Además, la función tiene derivadas de todo orden en su región de convergencia y son de la forma

$$\frac{d^m}{dz^m} F(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \right] \quad (m \geq 0).$$

Procedemos por inducción sobre m :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} F(a, b, c; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{ab}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a+1) \dots (a+k-1) (b+1) \dots (b+k-1)}{(c+1) \dots (c+k-1)} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{ab}{c} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a+1)_i (b+1)_i}{(c+1)_i} \frac{z^i}{i!} \\ &= \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; z). \end{aligned}$$

Suponemos que $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} F(a, b, c; z) = \frac{(a)_{m-1} (b)_{m-1}}{(c)_{m-1}} F(a + m - 1, b + m - 1, c + m - 1; z)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dz^m} F(a, b, c; z) &= \frac{d}{dz} \left[\frac{(a)_{m-1} (b)_{m-1}}{(c)_{m-1}} F(a + m - 1, b + m - 1, c + m - 1; z) \right] \\ &= \frac{(a)_{m-1} (b)_{m-1}}{(c)_{m-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a+m-1)_k (b+m-1)_k}{(c+m-1)_k} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{(a)_{m-1} (b)_{m-1}}{(c)_{m-1}} \frac{(a+m-1) (b+m-1)}{(c+m-1)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a+m)_i (b+m)_i}{(c+m)_i} \frac{z^i}{i!} \\ &= \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} F(a + m, b + m, c + m; z). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.4. *La representación integral de Euler para la función hipergeométrica es*

$$(i) \quad F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt,$$

con $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ y $|\arg(1-z)| < \pi$.

$$(ii) \quad F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-zt)^{-b} dt,$$

con $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0$ y $|\arg(1-z)| < \pi$.

Demostración.

(i) Escribimos el siguiente cociente de símbolos de Pochhammer como

$$\frac{(b)_k}{(c)_k} = \frac{B(b+k, c-b) \Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)},$$

donde $B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ es la función beta. Sustituimos el cociente anterior en la expresión de la función hipergeométrica,

$$\begin{aligned} F(a, b, c; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k \frac{B(b+k, c-b) \Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \frac{z^k}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k \left[\int_0^1 t^{b+k-1} (1-t)^{c-b-1} dt \right] \frac{z^k}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} (tz)^k dt. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Tomamos $|zt| < 1$ y escribimos

$$\frac{(a)_k}{k!} = (-1)^k \frac{(-a)(-a-1)\dots(-a-k+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

Multiplicamos y dividimos por $\Gamma(-a-k+1)$,

$$\begin{aligned} \frac{(a)_k}{k!} &= (-1)^k \frac{\Gamma(-a+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(-a-k+1)} \\ &= (-1)^k \binom{-a}{k}. \end{aligned}$$

Reemplazando en (1.2),

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt.$$

(ii) Como $F(a, b, c; z) = F(b, a, c; z)$, del inciso anterior se deduce que

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-zt)^{-b} dt.$$

□

Corolario 1.1.5 (Teorema de sumación de Gauss).

(i) Si $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$, entonces $F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}$.

(ii) Si a (o b) es un entero negativo $-n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $F(-n, b, c; 1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}$.

Demostración.

(i) Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$, $c \notin -\mathbb{N}_0$. Por la proposición (1.1.4) tenemos

$$\begin{aligned} F(a, b, c; 1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1-b} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} B(a, c-a-b) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(a+c-a-b)} \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \end{aligned}$$

(ii) Sea $a = -n$, con $n \in \mathbb{N}$. Por lo anterior,

$$F(-n, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c+n-b)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c-b)} = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}.$$

□

Proposición 1.1.6. Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|\arg(1-z)| < \pi$ las transformaciones de Euler de la función hipergeométrica son:

$$(i) \quad F(a, b, c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right).$$

$$(ii) \quad F(a, b, c; z) = (1-z)^{-b} F\left(c-a, b, c; \frac{z}{z-1}\right).$$

$$(iii) \quad F(a, b, c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; z).$$

Demostración. Las transformaciones (i) y (ii) son análogas, por lo que probaremos sólo (i) y (iii).

(i) Usamos la representación integral de Euler de la función hipergeométrica

$$F\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-c+b)} \int_0^1 t^{c-b-1} (1-t)^{c-c+b-1} \left(1 - \frac{zt}{z-1}\right)^{-a} dt.$$

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por $(1-z)^{-a}$

$$F\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) (1-z)^{-a} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 t^{c-b-1} (1-t)^{b-1} (1-z(1-t))^{-a} dt.$$

Por medio del cambio de variable $x = 1-t$, tenemos

$$\begin{aligned} F\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) (1-z)^{-a} &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 (1-x)^{c-b-1} x^{b-1} (1-zx)^{-a} dx \\ &= F(a, b, c; z). \end{aligned}$$

(iii) Usando (i) y (ii) tenemos

$$\begin{aligned} F(a, b, c; z) &= (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) \\ &= (1-z)^{-a} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{-(c-b)} F(c-a, c-b, c; z) \\ &= (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; z). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.7. *Las siguientes son algunas funciones elementales que tienen representación hipergeométrica:*

- (i) $(1 - z)^{-a} = F(a, b, b; z)$.
- (ii) $\log(1 - z) = -zF(1, 1, 2; z)$.
- (iii) $\log(1 + z) = zF(1, 1, 2; -z)$.
- (iv) $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; z^2\right)$.
- (v) $\operatorname{arc\,tg}(z) = zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2\right)$.

Demostración.

(i) Por la definición de símbolo de Pochhammer se deduce que

$$(0)_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Luego,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (0)_k}{(b)_k} \frac{\left(\frac{z}{z-1}\right)^k}{k!} = 1.$$

Usando la transformación de Euler de la proposición (1.1.6),

$$\begin{aligned} (1 - z)^{-a} &= (1 - z)^{-a} F\left(a, 0, b; \frac{z}{z-1}\right) \\ &= F(a, b, b; z). \end{aligned}$$

(ii) Escribimos la función $\log(1 - z)$ como serie de potencias, y utilizando que $(1)_k = k!$ y $(2)_k = (k+1)!$ tenemos

$$\log(1 - z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k+1} = -z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} \frac{(k!)^2}{(k!)^2} = -z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{(2)_k} \frac{z^k}{k!} = -zF(1, 1, 2; z).$$

(iii) Por (ii) tenemos que

$$\log(1 + z) = -(-z)F(1, 1, 2; -z) = zF(1, 1, 2; -z).$$

(iv) Como $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \log(1+z) - \log(1-z)$, usando (ii) y (iii) obtenemos

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{(2)_k} \frac{(-z)^k}{k!} + z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{(2)_k} \frac{z^k}{k!} = 2z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_{2k} (1)_{2k}}{(2)_{2k} (2k)!} z^{2k}.$$

De que $(1)_{2k} = (2k)!$ y $(2)_{2k} = (2k+1)!$, y multiplicando y dividiendo por $k!$ tenemos

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k}{2k+1} \frac{(z^2)^k}{k!}.$$

Pero

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \cdots \frac{2k-1}{2} = \frac{(1/2)_k}{(3/2)_k}.$$

Luego,

$$\log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = 2z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k (1)_k}{(3/2)_k} \frac{(z^2)^k}{k!} = 2zF(1/2, 1, 3/2; z^2).$$

(v) Sabemos que para $|z| < 1$, $\operatorname{arc\,tg}(z) = \frac{i}{2} \log \left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)$. Usando (iv) resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,tg}(z) &= \frac{i}{2} (-2iz) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k (1)_k}{(3/2)_k} \frac{[(iz)^2]^k}{k!} \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k (1)_k}{(3/2)_k} \frac{(-z^2)^k}{k!} \\ &= zF(1/2, 1, 3/2; -z^2). \end{aligned}$$

□

De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias [75] sabemos que toda ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con tres singularidades regulares puede transformarse en la ecuación diferencial hipergeométrica

$$z(1-z)f''(z) + [c - (a+b+1)z]f'(z) - abf(z) = 0, \quad (1.3)$$

donde a, b, c son números complejos arbitrarios independientes de z , $c \notin -\mathbb{N}_0$. A las constantes a, b, c las llamaremos parámetros de la ecuación. Esta ecuación diferencial tiene singularidades regulares en $z = 0, 1, \infty$.

Teorema 1.1.8. *En $|z| < 1$, la función hipergeométrica es solución de la ecuación diferencial hipergeométrica (1.3).*

Demostración. Sea $f(z) = F(a, b, c; z)$. Como $f(z)$ es analítica en $|z| < 1$, representamos sus derivadas de primer y segundo orden en términos de series de potencias de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}, \\ \frac{d^2f}{dz^2}(z) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^{k-2}}{(k-2)!}. \end{aligned}$$

Reemplazamos dichas derivadas en (1.3),

$$\begin{aligned} z(1-z) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^{k-2}}{(k-2)!} + [c - (a+b+1)z] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \\ - ab \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{z^k}{k!}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Si analizamos los coeficientes asociados a la potencia z^k en (1.4), obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} C_0 &= c \frac{ab}{c} - ab, \\ C_1 &= \frac{(a)_2 (b)_2}{(c)_2} + c \frac{(a)_2 (b)_2}{(c)_2} - (a+b+1) \frac{ab}{c} - ab \frac{ab}{c}, \\ C_k &= \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1} (k-1)!} - \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (k-2)!} + c \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1} k!} - (a+b+1) \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (k-1)!} - ab \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!}, \end{aligned}$$

donde $k \geq 2$.

Por lo tanto, si resolvemos el sistema, obtenemos $C_k = 0$ para todo $k \geq 0$. Se concluye que $F(a, b, c; z)$ es solución de la ecuación diferencial hipergeométrica. \square

1.2. Función Hipergeométrica Confluente

En esta sección consideramos una forma modificada de la ecuación diferencial hipergeométrica que se obtiene por la confluencia de dos de sus tres singularidades. Esta confluencia da una ecuación con una singularidad irregular y una regular. Se la conoce como ecuación confluente o ecuación de Kummer. Como solución de esta ecuación surge la función hipergeométrica confluente o función de Kummer de primer tipo $F(\alpha, \beta, x)$ [61].

Casos particulares de esta función son los polinomios de Laguerre que veremos en la siguiente sección. Otras funciones especiales, como la función exponencial, la función error y la función gamma incompleta, también pueden ser representadas en términos de la función hipergeométrica confluente.

A continuación se desarrolla su definición y algunas propiedades.

Definición 1.2.1. Para $a, c \in \mathbb{C}$, $c \notin -\mathbb{N}_0$ y $z \in \mathbb{C}$ definimos la función hipergeométrica confluente como

$${}_1F_1(a, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(c)_k k!}.$$

Decimos que la función hipergeométrica confluente es una forma degenerada de la función hipergeométrica por lo siguiente.

Sea $b \in \mathbb{R}$. Evaluamos la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a, b, c; z)$, con parámetros a, b y c , $c \notin -\mathbb{N}_0$, en $\frac{z}{b}$,

$${}_2F_1\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k! b^k}$$

y analizamos los primeros coeficientes

$$\begin{aligned} \frac{(b)_0}{b^0} &= 1, \\ \frac{(b)_1}{b} &= 1, \\ \frac{(b)_2}{b^2} &= \frac{b(b+1)}{b^2} = 1 + \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Generalizando, para todo $k \geq 1$ obtenemos

$$\frac{(b)_k}{b^k} = \frac{b(b+1)\dots(b+k-1)}{b^k} = \left(1 + \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 + \frac{k-1}{b}\right).$$

Luego, hacemos tender b a infinito,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 + \frac{k-1}{b}\right) = {}_1F_1(a, c; z)$$

Como ${}_2F_1(a, b, c; z)$ tiene singularidades en $z = 0, 1, \infty$, ${}_2F_1\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right)$ los tendrá en $z = 0, b, \infty$. Pero cuando b tiende a infinito, la función confluyente ${}_1F_1$ los tendrá en $z = 0$ y en $z = \infty$, este último es confluencia de b y de ∞ .

Proposición 1.2.1. *La función hipergeométrica confluyente converge absolutamente en todo el plano complejo.*

Demostración. Como la función ${}_2F_1\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right)$ converge absolutamente en $|z| < b$, cuando b tiende a infinito la función ${}_1F_1(a, c; z)$ converge absolutamente en $|z| < \infty$, es decir, en todo el plano complejo. \square

Proposición 1.2.2. *Las relaciones de ${}_1F_1(a, c; z)$ con sus funciones de contigüidad son*

- (i) $(c - a - 1) {}_1F_1 + a {}_1F_1(a + 1) - (c - 1) {}_1F_1(c - 1) = 0.$
- (ii) $c {}_1F_1 - c {}_1F_1(a - 1) - z {}_1F_1(c + 1) = 0.$
- (iii) $(c - 2a - z) {}_1F_1 + a {}_1F_1(a + 1) - (c - a) {}_1F_1(a - 1) = 0.$
- (iv) $c(a + z) {}_1F_1 - ac {}_1F_1(a + 1) - (c - a)z {}_1F_1(c + 1) = 0.$
- (v) $(a - 1 + z) {}_1F_1 + (c - a) {}_1F_1(a - 1) - (c - 1) {}_1F_1(c - 1) = 0.$
- (vi) $c(c - 1 + z) {}_1F_1 - (c - a)z {}_1F_1(c + 1) - c(c - 1) {}_1F_1(c - 1) = 0.$

donde ${}_1F_1 = {}_1F_1(a, c; z)$, ${}_1F_1(a \pm 1) = {}_1F_1(a \pm 1, c; z)$ y ${}_1F_1(c \pm 1) = {}_1F_1(a, c \pm 1; z)$.

Demostración. Probaremos las relaciones (i) y (ii) ya que las demás se prueban de manera similar.

(i) Si sustituimos la representación en serie de potencias de la función confluyente ${}_1F_1$ obtenemos la siguiente igualdad

$$(c - a - 1) {}_1F_1 + a {}_1F_1(a + 1) - (c - 1) {}_1F_1(c - 1) = (c - a - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} + a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a + 1)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} - (c - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c - 1)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (1.5)$$

Usando las propiedades de Pochhammer,

$$\begin{aligned} a(a + 1)_k &= (a)_k(a + k), \\ \frac{c - 1}{(c - 1)_k} &= \frac{c + k - 1}{(c)_k}. \end{aligned}$$

La expresión (1.5) factorizada se reduce a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} [c - a - 1 + a + k - (c + k - 1)] \frac{z^k}{k!} = 0.$$

(ii) Reemplazamos la función confluyente ${}_1F_1$ por su representación,

$$c {}_1F_1 - c {}_1F_1(a-1) - z {}_1F_1(c+1) = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} - c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-1)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c+1)_k} \frac{z^{k+1}}{k!}. \quad (1.6)$$

Por las propiedades de Pochhammer,

$$\begin{aligned} (a-1)_k &= \frac{(a)_k (a-1)}{a+k-1}, \\ \frac{1}{(c+1)_k} &= \frac{c}{(c)_k (c+k)}. \end{aligned}$$

Factorizando (1.6), obtenemos la expresión

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \frac{ck}{a+k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^{k+1}}{k!} \frac{c}{c+k}.$$

El coeficiente de z^0 , claramente se anula.

Para $k \geq 1$, el coeficiente de cada potencia de z es

$$\frac{(a)_k}{(c)_k (k-1)!} \frac{c}{a+k-1} - \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1} (k-1)!} \frac{c}{c+k-1}.$$

Podemos reescribir $\frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}}$ como $\frac{(a)_k (c+k-1)}{(c)_k (a+k-1)}$. Entonces, el coeficiente de cada potencia de z es

$$\frac{(a)_k}{(c)_k (k-1)!} \left[\frac{1}{a+k-1} - \frac{c+k-1}{(a+k-1)(c+k-1)} \right] = 0.$$

□

Proposición 1.2.3. *La función confluyente ${}_1F_1(a, c; z)$ tiene la siguiente relación con sus derivadas*

$$\frac{d^m}{dz^m} {}_1F_1(a, c; z) = \frac{(a)_m}{(c)_m} {}_1F_1(a+m, c+m; z) \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Demostración. Como la función confluyente es analítica en todo el plano complejo, existen sus derivadas de todo orden y

$$\frac{d^m}{dz^m} {}_1F_1(a, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \right] \quad (m \geq 0).$$

Procedemos por inducción sobre m :

$$\frac{d}{dz} {}_1F_1(a, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{a}{c} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a+1)_i}{(c+1)_i} \frac{z^i}{i!} = \frac{a}{c} {}_1F_1(a+1, c+1; z).$$

Suponemos que $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} {}_1F_1(a, c; z) = \frac{(a)_{m-1}}{(c)_{m-1}} {}_1F_1(a+m-1, c+m-1; z)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dz^m} {}_1F_1(a, c; z) &= \frac{d}{dz} \left[\frac{(a)_{m-1}}{(c)_{m-1}} {}_1F_1(a+m-1, c+m-1; z) \right] \\ &= \frac{(a)_{m-1}}{(c)_{m-1}} \frac{(a+m-1)}{(c+m-1)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a+m)_i z^i}{(c+m)_i i!} \\ &= \frac{(a)_m}{(c)_m} {}_1F_1(a+m, c+m; z). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.4. *La representación integral de Euler para la función hipergeométrica confluyente es*

$${}_1F_1(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} (1-t)^{c-a-1} t^{a-1} dt,$$

con $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0$ y $|\arg(1-z)| < \pi$.

Demostración. Por lo visto en la proposición (1.1.4), la representación integral de la función hipergeométrica es

$$F\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \left(1 - \frac{zt}{b}\right)^{-b} dt,$$

para $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0$ y $|\arg(1-z)| < \pi$.

Por otro lado, tenemos que $\left(1 - \frac{zt}{b}\right)^{-b}$ tiende a e^{zt} cuando b tiende a infinito.

Como el integrando es medible y está acotado, por el Teorema de la Convergencia Dominada se deduce

$${}_1F_1(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} (1-t)^{c-a-1} t^{a-1} dt.$$

□

Proposición 1.2.5. *Las siguientes son algunas funciones elementales que tienen representación hipergeométrica confluyente:*

(i) $e^z = {}_1F_1(a, a; z)$.

(ii) $\frac{e^z - 1}{z} = {}_1F_1(1, 2; z)$.

(iii) $1 - 2z + \frac{z^2}{2} = {}_1F_1(-2, 1; z)$.

Demostración.

(i) Representando la función e^z en series de potencia,

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

y multiplicando y dividiendo por el coeficiente $(a)_k$ obtenemos

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(a)_k} \frac{z^k}{k!} = {}_1F_1(a, a; z).$$

(ii) Desarrollamos la función como serie de potencias,

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1 \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{(i+1)!}.$$

Sabiendo que $i! = (1)_i$ y que $(i+1)! = (2)_i$, multiplicamos y dividimos por $i!$, obteniendo

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1)_i}{(2)_i} \frac{z^i}{i!} = {}_1F_1(1, 2; z).$$

(iii) Por definición

$$(-2)_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k 2!}{(2-k)!}, & \text{si } 0 \leq k \leq 2, \\ 0, & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

De aquí, $(-2)_0 = 1$, $(-2)_1 = -2$ y $(-2)_2 = 2!$.

Además, $(1)_0 = (1)_1 = 1$ y $(1)_2 = 2!$. Entonces,

$$1 - 2z + \frac{z^2}{z} = \frac{(-2)_0}{(1)_0} \frac{z^0}{0!} + \frac{(-2)_1}{(1)_1} \frac{z}{1!} + \frac{(-2)_2}{(1)_2} \frac{z^2}{2!} = {}_1F_1(-2, 1; z).$$

□

Proposición 1.2.6. *La ecuación diferencial hipergeométrica confluyente es*

$$z f''(z) + (c - z) f'(z) - a f(z) = 0, \quad (1.7)$$

donde $a, c \in \mathbb{C}$, $c \notin -\mathbb{N}_0$, para la cual ${}_1F_1(a, c; z)$ es solución.

Demostración. Sea $b \neq 0$. Sustituimos $z = \frac{x}{b}$ en la ecuación diferencial hipergeométrica (1.3),

$$\frac{x}{b} \left(1 - \frac{x}{b} \right) f''(z) + \left[c - (a + b + 1) \frac{x}{b} \right] f'(z) - a b f(z) = 0. \quad (1.8)$$

Derivamos f respecto de z

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz}(z) &= \frac{df}{dx}(x) b, \\ \frac{d^2 f}{dz^2}(z) &= \frac{d^2 f}{dx^2}(x) b^2, \end{aligned}$$

y reemplazamos las derivadas de primer y segundo orden en (1.8),

$$\frac{x}{b} \left(1 - \frac{x}{b} \right) f''(x) b^2 + \left[c - (a + b + 1) \frac{x}{b} \right] f'(x) b - a b f(x) = 0.$$

Como $b \neq 0$, la igualdad anterior es equivalente a

$$x \left(1 - \frac{x}{b} \right) f''(x) + \left[c - (a + b + 1) \frac{x}{b} \right] f'(x) - a f(x) = 0.$$

Hacemos tender b a infinito, con lo cual la ecuación diferencial (1.8) se transforma en

$$x f''(x) + (c - x) f'(x) - a f(x) = 0,$$

y la solución f tiende a ${}_1F_1(a, c; z)$.

□

1.3. Polinomios Ortogonales Clásicos

En esta sección introducimos el concepto de polinomios ortogonales clásicos. Estos se caracterizan por estar definidos sobre intervalos reales, por satisfacer una ecuación diferencial de tipo hipergeométrico y una relación de recurrencia de tres términos. Pese a que sólo existen tres familias ortogonales respecto a un peso positivo, Jacobi, Laguerre y Hermite, se destacan casos particulares de la familia de Jacobi

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+\beta+n+k}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k.$$

Para valores específicos de sus parámetros α y β , los casos más destacados son

- Polinomios de Chebyshev $T_n(x)$, con $\alpha = \beta = -1/2$.
- Polinomios de Chebyshev de segunda clase $U_n(x)$, con $\alpha = \beta = 1/2$.
- Polinomios de Legendre $P_n(x)$, con $\alpha = \beta = 0$.

Los resultados de esta sección se basan en [7, 15, 76].

Definición 1.3.1. Sea \mathbb{C} el cuerpo de los números complejos, denotamos por $\mathbb{C}[x]$ al espacio vectorial formado por todos los polinomios de una variable real con coeficientes complejos, es decir,

$$\mathbb{C}[x] = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{C} \ \forall i = 0, 1, \dots, n, \ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Si a_n es distinto de cero, $gr(p) = n$ es el grado del polinomio $p(x)$ y a_n es su coeficiente principal. Si $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$ se llama polinomio nulo y no tiene definido un grado. Además, si $a_n = 1$, el polinomio se denomina mónico.

Definición 1.3.2. Una función $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$ es de peso si es positiva en casi todo punto y sus momentos

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x) dx,$$

existen y son finitos para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Definición 1.3.3. Un producto interno en un espacio vectorial complejo V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ que para todo $f, g, h \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ satisface las siguientes propiedades:

- (i) (*Positividad*) $\langle f, f \rangle \geq 0$ y $\langle f, f \rangle = 0$ si y sólo si $f = 0$,
- (ii) (*Simetría Conjugada*) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$,
- (iii) (*Linealidad*) $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$.

Observación. Todo espacio vectorial V con producto interno es un espacio normado, es decir, existe una aplicación $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{C}$ que para todo $f, g \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ verifica:

- (i) (*Positividad*) $\|f\| \geq 0$ y $\|f\| = 0$ si y sólo si $f = 0$,
- (ii) (*Homogeneidad*) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$,

(iii) (*Desigualdad Triangular*) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Notemos que $f = 0$ significa que f es idénticamente nula en casi todo punto.

Proposición 1.3.1. *Dada una función de peso w definida en el intervalo $[a, b]$,*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx$$

es un producto interno en $\mathbb{C}[x]$.

Demostración. Sean $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(i) Como $\|f\|^2 w(x) \geq 0$ en casi todo punto, entonces

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}w(x)dx = \int_a^b \|f\|^2 w(x)dx \geq 0.$$

Por otro lado, si $f = 0$, claramente $\langle f, f \rangle = 0$. Y si $\langle f, f \rangle = 0$, como w es positiva en casi todo punto, debe ser $f = 0$.

(ii) La igualdad se obtiene usando las propiedades de conjugación,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx = \overline{\int_a^b \overline{f(x)}g(x)w(x)dx} = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\overline{h(x)}w(x)dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\overline{h(x)}w(x)dx + \beta \int_a^b g(x)\overline{h(x)}w(x)dx \\ &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

□

Definición 1.3.4. Una familia de polinomios $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}[x]$ es ortogonal respecto a una función de peso w si

(i) $p_n(x)$ es un polinomio de grado n para $n \geq 0$,

(ii) $\langle p_n(x), p_m(x) \rangle = \int_a^b p_n(x)\overline{p_m(x)}w(x)dx = 0$ siempre que $m \neq n$.

Y se denomina ortonormal si además satisface $\langle p_n(x), p_n(x) \rangle = 1$.

Ejemplo 1.3.5. Los polinomios de Jacobi $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ son ortogonales respecto al peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, para $\alpha, \beta > -1$ y $x \in [-1, 1]$.

Los polinomios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ son ortogonales respecto al peso $w(x) = e^{-x}x^\alpha$, para $\alpha > -1$ y $x \in [0, \infty)$.

Los polinomios de Chebyshev $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$ son ortogonales respecto al peso $(1-x^2)^{-1/2}$, lo cual se verifica fácilmente por definición. En efecto,

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-1/2}dx = \int_{-1}^1 \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)(1-x^2)^{-1/2}dx.$$

Por medio de la sustitución $\theta = \arccos x$ tenemos

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-1/2}dx = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta)d\theta.$$

Si $n = m$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-1/2}dx &= \int_0^\pi \cos^2(n\theta)d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Si $n \neq m$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-1/2}dx &= \left[\frac{\operatorname{sen}((n-m)\theta)}{2(n-m)} + \frac{\operatorname{sen}((n+m)\theta)}{2(n+m)} \right]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

El siguiente teorema determina que existe una única familia de polinomios ortogonales asociada a una función de peso.

Teorema 1.3.2 (Teorema de Existencia y Unicidad). *Dada una función de peso $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, existe una única familia de polinomios $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}[x]$ que satisface:*

(i) $p_n(x) = a_n x^n + r_{n-1}(x)$, donde $a_n > 0$ y $r_{n-1}(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos de grado a lo sumo $n-1$,

(ii) $\int_a^b p_n(x)\overline{p_m(x)}dw(x) = \delta_{n,m}$, donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker.

Demostración. La existencia de la familia de polinomios se deduce inmediatamente de que la familia $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una base para el espacio $\mathbb{C}[x]$ y del teorema de Gram-Schmidt.

Para probar la unicidad tomaremos familias $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de polinomios ortogonales en $\mathbb{C}[x]$ que satisfacen las condiciones, y probaremos por inducción que $p_n = q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Si $n = 0$, utilizando la normalización de la segunda condición del teorema y la positividad del coeficiente principal de la primera, se deduce que $p_0 = q_0$.

Supongamos que $p_m = q_m$ para todo $m < n$. Como el polinomio p_n pertenece al subespacio generado por $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ y por la hipótesis inductiva, tenemos

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i q_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(x) + c_n q_n(x),$$

con $c_i = \int_a^b p_n(x) \overline{q_i(x)} dw(x) = \int_a^b p_n(x) \overline{p_i(x)} dw(x)$ para todo $i = 0, \dots, n-1$.

Por la segunda condición, $c_i = 0$ para $i < n$. Entonces, $p_n(x) = c_n q_n(x)$.

Utilizando el mismo razonamiento que en el caso $n = 0$, se tiene que $c_n = 1$. Con lo cual queda demostrado el teorema. \square

Corolario 1.3.3. Si $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ son familias de polinomios ortogonales respecto al mismo peso, entonces existen $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ no nulos tales que $p_n = c_n q_n$. Además, si los polinomios son mónicos, $c_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Proposición 1.3.4. Si $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una familia de polinomios ortogonales, entonces todo polinomio q de grado menor que n es ortogonal a p_n ($n \in \mathbb{N}$).

Demostración. Como el polinomio q pertenece al subespacio generado por $\{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ y $\langle p_k, p_n \rangle = 0$ para todo $0 \leq k < n$, entonces $\langle q, p_n \rangle = 0$. \square

Teorema 1.3.5 (Recursión de tres términos). Toda familia de polinomios ortogonales $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ con coeficiente principal $\gamma_n > 0$ satisface una relación de recurrencia de tres términos de la forma:

$$xp_n(x) = \lambda_{n+1} p_{n+1}(x) + \lambda_n p_n(x) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(x),$$

donde $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = \gamma_0$, y los coeficientes son

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}, \\ \lambda_n &= \frac{\langle xp_n(x), p_n(x) \rangle}{\|p_n(x)\|^2}, \\ \lambda_{n-1} &= \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \frac{\|p_n(x)\|^2}{\|p_{n-1}(x)\|^2}. \end{aligned}$$

Demostración. Como $xp_n(x)$ es un polinomio de grado $n+1$, existen ciertos $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $0 \leq i \leq n+1$, tales que

$$xp_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i p_i(x).$$

Además, la familia $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es ortogonal, por lo que para $k = 0, \dots, n-2$

$$0 = \langle xp_n(x), p_k(x) \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i \langle p_i(x), p_k(x) \rangle = \lambda_k \|p_k(x)\|^2,$$

es decir,

$$xp_n(x) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(x) + \lambda_n p_n(x) + \lambda_{n+1} p_{n+1}(x).$$

Comparamos los coeficientes principales y deducimos

$$\lambda_{n+1} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} > 0.$$

Para calcular λ_n tenemos que

$$\langle xp_n(x), p_n(x) \rangle = \langle \lambda_{n-1} p_{n-1}(x) + \lambda_n p_n(x) + \lambda_{n+1} p_{n+1}(x), p_n(x) \rangle = \lambda_n \|p_n(x)\|^2,$$

de donde

$$\lambda_n = \frac{\langle xp_n(x), p_n(x) \rangle}{\|p_n(x)\|^2}.$$

Notemos que λ_n es un número real, pues

$$\begin{aligned} \overline{\lambda_n} &= \frac{1}{\|p_n(x)\|^2} \overline{\int_a^b xp_n(x) \overline{p_n(x)} dx} \\ &= \frac{1}{\|p_n(x)\|^2} \int_a^b \overline{xp_n(x)} p_n(x) dx \\ &= \lambda_n. \end{aligned}$$

Finalmente, para calcular λ_{n-1} consideramos el producto interno

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p_{n+1}(x), p_{n-1}(x) \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_{n+1}} \langle xp_n(x) - \lambda_{n-1}p_{n-1}(x) - \lambda_n p_n(x), p_{n-1}(x) \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_{n+1}} \langle p_n(x), xp_{n-1}(x) \rangle - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}} \|p_{n-1}(x)\|^2. \end{aligned}$$

Como $xp_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado n , existen ciertos $\tilde{\lambda}_i$, $0 \leq i \leq n$, tales que

$$xp_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{\lambda}_i p_i(x). \quad (1.9)$$

Luego,

$$\langle p_n(x), xp_{n-1}(x) \rangle = \sum_{i=0}^n \tilde{\lambda}_i \langle p_n(x), p_i(x) \rangle = \tilde{\lambda}_n \|p_n(x)\|^2.$$

Comparando los coeficientes principales de (1.9), obtenemos $\gamma_{n-1} = \tilde{\lambda}_n \gamma_n$. Por lo tanto,

$$\lambda_{n-1} = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \frac{\|p_n(x)\|^2}{\|p_{n-1}(x)\|^2} > 0.$$

□

El recíproco de este resultado es el siguiente teorema:

Teorema 1.3.6 (Teorema de Favard). *Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios que satisface la siguiente relación de recurrencia de tres términos para todo $n \geq 0$:*

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad (1.10)$$

con las condiciones iniciales $p_{-1}(x) = 0$ y $p_0(x) = \gamma_0 > 0$, donde $a_n \in \mathbb{R}^+$ y $b_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces, existe una m -distribución w tal que para todo $n \neq m$

$$\langle p_n(x), p_m(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) w(x) dx = 0.$$

Demostración. Suponemos sin pérdida de generalidad que $p_0(x) = 1$ y $m < n$. Usando la relación de recurrencia (1.10) definimos el producto interno inductivamente como

$$\begin{aligned} \langle p_0(x), p_0(x) \rangle &= \mu_0 > 0, \\ \langle p_0(x), p_n(x) \rangle &= 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sea $p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$. Utilizamos la relación de recurrencia (1.10) para hallar los momentos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p_0(x), p_1(x) \rangle \\ &= \frac{1}{a_1} [\langle 1, xp_0(x) \rangle - b_0 \langle 1, p_0(x) \rangle - a_0 \langle 1, p_{-1}(x) \rangle] \\ &= \frac{\mu_1 - b_0 \mu_0}{a_1}. \end{aligned}$$

Despejando, $\mu_1 = b_0 \mu_0$.

Procedemos igual para μ_2 :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p_0(x), p_2(x) \rangle \\ &= \frac{1}{a_2} [\langle 1, xp_1(x) \rangle - b_1 \langle 1, p_1(x) \rangle - a_1 \langle 1, p_0(x) \rangle] \\ &= \frac{c_1 \mu_2 + c_0 \mu_1 - a_1 \mu_0}{a_2} \\ &= \frac{c_1 \mu_2 + (c_0 b_0 - a_1) \mu_0}{a_2}. \end{aligned}$$

Despejamos, $\mu_2 = \frac{a_1 - c_0 b_0}{c_1} \mu_0$.

Reiterando el procedimiento, obtenemos una sucesión de momentos $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$.

Observemos que

$$\begin{aligned} \langle xp_n(x), p_0(x) \rangle &= a_{n+1} \langle p_{n+1}(x), p_0(x) \rangle + b_n \langle p_n(x), p_0(x) \rangle + a_n \langle p_{n-1}(x), p_0(x) \rangle \\ &= 0, \text{ para } n \geq 2, \\ \langle x^2 p_n(x), p_0(x) \rangle &= a_{n+1} \langle xp_{n+1}(x), p_0(x) \rangle + b_n \langle xp_n(x), p_0(x) \rangle + a_n \langle xp_{n-1}(x), p_0(x) \rangle \\ &= 0, \text{ para } n \geq 3. \end{aligned}$$

Continuando con este razonamiento, concluimos que para $0 \leq k < n$

$$\langle x^k p_n(x), p_0(x) \rangle = 0,$$

y que para $k = n$

$$\begin{aligned} \langle x^n p_n(x), p_0(x) \rangle &= \langle x^{n-1}(xp_n(x)), p_0(x) \rangle \\ &= a_{n+1} \langle x^{n-1} p_{n+1}(x), p_0(x) \rangle + b_n \langle x^{n-1} p_n(x), p_0(x) \rangle + a_n \langle x^{n-1} p_{n-1}(x), p_0(x) \rangle \\ &= a_n \langle x^{n-2}(xp_{n-1}(x)), p_0(x) \rangle \\ &= a_n [a_n \langle x^{n-2} p_n(x), p_0(x) \rangle + b_{n-1} \langle x^{n-2} p_{n-1}(x), p_0(x) \rangle + a_{n-1} \langle x^{n-2} p_{n-2}(x), p_0(x) \rangle]. \end{aligned}$$

Continuando el procedimiento,

$$\langle x^n p_n(x), p_0(x) \rangle = a_n a_{n-1} \dots a_1 \mu_0 > 0.$$

Por lo tanto, si $m < n$,

$$\langle p_n(x), p_m(x) \rangle = \sum_{k=0}^m c_k \langle p_n(x), x^k \rangle = 0.$$

□

Dentro de la teoría de polinomios ortogonales se destaca una clase importante de familias, las familias clásicas, por sus propiedades y aplicaciones. Éstas se caracterizan por ser autofunciones de un operador diferencial de tipo hipergeométrico, el cual se define a continuación.

Definición 1.3.6. Se denomina ecuación diferencial de tipo hipergeométrico a toda ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1.11)$$

donde $\sigma, \tau \in \mathbb{C}[x]$ de grados a lo sumo 2 y 1, respectivamente, y $\lambda \in \mathbb{C}$ es una constante.

Además, sus soluciones se denominan funciones de tipo hipergeométrico.

Proposición 1.3.7. Las derivadas de una función de tipo hipergeométrico son también funciones de tipo hipergeométrico.

Demostración. Derivando (1.11) respecto a la variable x y reemplazando $y'(x) = y_1(x)$, obtenemos

$$\sigma(x)y_1''(x) + \tau_1(x)y_1'(x) + \mu_1(x)y_1(x) = 0, \quad (1.12)$$

donde $\tau_1(x) = \sigma'(x) + \tau(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo 1 y $\mu_1 = \tau'(x) + \lambda$ es una constante.

Por lo tanto, (1.12) es una ecuación diferencial de tipo hipergeométrico.

Reiterando este procedimiento, podemos obtener una ecuación de tipo hipergeométrico para $y_n(x) = y^{(n)}(x)$:

$$\sigma(x)y_n''(x) + \tau_n(x)y_n'(x) + \mu_n(x)y_n(x) = 0, \quad (1.13)$$

donde $\tau_n(x) = n\sigma'(x) + \tau(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo 1 y $\mu_n = \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x) + n\tau'(x) + \lambda$ es una constante.

Por lo tanto, las derivadas sucesivas de $y(x)$ son funciones de tipo hipergeométrico. \square

La proposición anterior permite hallar explícitamente soluciones que sean polinomios de grado n , las cuales son, en cierto sentido, las soluciones más simples de (1.11). Su expresión se llama fórmula de Rodrigues, ya que fue establecida en 1814 por B. O. Rodrigues para los polinomios de Legendre.

Teorema 1.3.8. Si $\lambda = \lambda_n = -n\tau' + \frac{n(n-1)\sigma''}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ en (1.11), sus soluciones son polinomios y se pueden expresar mediante la siguiente fórmula de Rodrigues:

$$\frac{d^m}{dx^m} p_n(x) = \frac{A_{mn} B_n}{\rho_m(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \rho_n(x),$$

donde $A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k$, $A_0 = 1$, siendo $A_{mn} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}$, y $B_n = \frac{1}{A_{nn}} \frac{d^n}{dx^n} p_n(x)$ es el factor normalizante.

Además, si $m = 0$ obtenemos una representación explícita de estos polinomios

$$p_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x)\rho(x)] \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Demostración. Multiplicamos (1.11) y (1.13) por funciones apropiadas $\rho(x)$ y $\rho_n(x)$, respectivamente, de manera que se puedan escribir en la forma autoadjunta

$$(\sigma(x)\rho(x)y'(x))' + \lambda\rho(x)y = 0, \quad (1.14)$$

$$(\sigma(x)\rho_n(x)y_n'(x))' + \mu_n\rho_n(x)y_n(x) = 0. \quad (1.15)$$

Aquí, $\rho(x)$ y $\rho_n(x)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x), \quad (1.16)$$

$$(\sigma(x)\rho_n(x))' = \tau_n(x)\rho_n(x). \quad (1.17)$$

Notemos que al definir $\rho_0(x) = \rho(x)$, las ecuaciones (1.14) y (1.15) se reducen a una sola expresión autoadjunta. Usando la expresión de $\tau_n(x) = n\sigma'(x) + \tau(x)$ y de las ecuaciones (1.16) y (1.17) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma(x)\rho_n(x))'}{\rho_n(x)} &= \tau(x) + n\sigma'(x) \\ \frac{\sigma'(x)\rho_n(x) + \sigma(x)\rho_n'(x)}{\rho_n(x)} &= \frac{\sigma'(x)\rho(x) + \sigma(x)\rho'(x)}{\rho(x)} + n\sigma'(x) \\ \frac{\rho_n'(x)}{\rho_n(x)} &= \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} + \frac{n\sigma'(x)}{\sigma(x)}. \end{aligned}$$

Integrando ambos miembros concluimos que

$$\rho_n(x) = \sigma^n(x)\rho(x) \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (1.18)$$

Como $\sigma(x)\rho_n(x) = \rho_{n+1}(x)$ y $y_n'(x) = y_{n+1}(x)$, podemos reescribir (1.15) en la forma

$$\rho_n(x)y_n(x) = \frac{-1}{\mu_n} (\rho_{n+1}(x)y_{n+1}(x))'.$$

Por lo tanto, cuando $m < n$ obtenemos sucesivamente

$$\begin{aligned} \rho_m(x)y_m(x) &= -\frac{1}{\mu_m} (\rho_{m+1}(x)y_{m+1}(x))' \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) (\rho_{m+2}(x)y_{m+2}(x))'' \\ &= \dots \\ &= \frac{A_m}{A_n} (\rho_n(x)y_n(x))^{(n-m)}, \end{aligned}$$

donde $A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k$, $A_0 = 1$.

La condición $\lambda_n = -n\tau'(x) + \frac{n(n-1)\sigma''(x)}{2}$ es equivalente a $\mu_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Luego, la ecuación diferencial (1.13) tiene como solución particular $y_n(x) = cte$. Como $y_n(x) = y^{(n)}(x)$, la ecuación (1.11) tiene una solución particular de la forma $y(x) = p_n(x)$ que es un polinomio de grado n .

A continuación, procedemos para obtener una forma explícita de dichos polinomios. Si $y(x) = p_n(x)$ es un polinomio de grado n , entonces

$$\begin{aligned} y_m(x) &= p_n^{(m)}(x), \\ y_n(x) &= p_n^{(n)}(x) = cte., \end{aligned}$$

y obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{d^m}{dx^m} p_n(x) = \frac{A_{mn} B_n}{\rho_m(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \rho_n(x), \quad (1.19)$$

donde $A_{mn} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}$ y $B_n = \frac{1}{A_{nn}} \frac{d^n}{dx^n} p_n(x)$.

En particular, para $m = 0$ tenemos la representación explícita

$$p_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x)\rho(x)] \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (1.20)$$

□

Observación. La ecuación (1.20) puede quedar completamente determinada si calculamos el valor de la función $\rho(x)$. El mismo se obtiene resolviendo la ecuación diferencial (1.16), de donde

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left(\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx\right).$$

En esta expresión, $\rho(x)$ es el peso respecto al cual son ortogonales los polinomios definidos por (1.20).

Definición 1.3.7. Una familia de polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es clásica si satisface

(i) $\left\{ \frac{dp_n(x)}{dx} \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una familia de polinomios ortogonales.

(ii) Los polinomios satisfacen una ecuación diferencial de tipo hipergeométrico

$$\sigma(x)p_n''(x) + \tau(x)p_n'(x) + \lambda_n p_n(x) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

donde σ, τ son independientes de n y de grados a lo sumo 2 y 1, respectivamente, y λ_n es una constante que depende de n .

(iii) Los polinomios pueden expresarse en términos de una fórmula de Rodrigues

$$p_n(x) = \frac{1}{c_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n w(x)],$$

donde c_n es una constante que depende de n , $w(x)$ es el peso asociado a la familia y σ es el coeficiente de mayor grado de la ecuación diferencial.

(iv) Los polinomios verifican una relación de recurrencia de tres términos

$$x p_n(x) = a_{n+1} p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x).$$

En la siguiente tabla se detallan las únicas familias de polinomios ortogonales clásicos.

Nombre	Peso $w(x)$	Intervalo	Fórmula de Rodrigues
Hermite $H_n(x)$	e^{-x^2}	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{(-1)^n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x)]$
Laguerre $L_n^\alpha(x)$	$e^{-x} x^\alpha$	$[0, \infty)$	$\frac{1}{n! w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [x^n w(x)]$
Jacobi $P_n^{\alpha, \beta}(x)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{2^n n! w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n w(x)]$

Por la segunda condición de la definición de polinomios ortogonales clásicos, todos los polinomios deben ser solución de una ecuación diferencial de tipo hipergeométrico. En el siguiente cuadro se encuentran las expresiones de los coeficientes de las ecuaciones diferenciales para las cuales cada una de las familias de los polinomios ortogonales clásicos es solución.

Nombre	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	λ_n
Hermite $H_n(x)$	1	$-2x$	$2n$
Laguerre $L_n^\alpha(x)$	x	$1-x+\alpha$	n
Jacobi $P_n^{\alpha, \beta}(x)$	$1-x^2$	$\beta-\alpha-x(2+\alpha+\beta)$	$n(n+\alpha+\beta+1)$

1.4. Polinomios de Laguerre

Como vimos en la sección anterior, los polinomios de Laguerre constituyen una de las familias clásicas de polinomios ortogonales, por lo que son autofunciones de un operador diferencial hipergeométrico.

Definición 1.4.1. Una familia de polinomios ortogonales $\{L_n^\alpha(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es de Laguerre si satisface la ecuación diferencial

$$xf''(x) + (\alpha + 1 - x)f'(x) + nf(x) = 0, \quad (1.21)$$

con $x \in [0, \infty)$, $\alpha > -1$.

Proposición 1.4.1. Para $x \in [0, \infty)$ y $\alpha > -1$, la única familia de polinomios ortogonales que es solución de una ecuación diferencial hipergeométrica confluyente (1.7) son los polinomios de Laguerre $\{L_n^\alpha(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Su expresión está dada por

$$L_n^\alpha(x) = \binom{n + \alpha}{n} {}_1F_1(-n, \alpha + 1; x). \quad (1.22)$$

Demostración. Llamamos $c = \alpha + 1$ y $a = -n$ en la ecuación diferencial (1.21), obteniendo una ecuación diferencial confluyente

$$xf''(x) + (c - x)f'(x) - af(x) = 0. \quad (1.23)$$

Buscamos una solución $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ que sea analítica en $|x| < \infty$ y tal que, por convención, $a_0 = \binom{n + \alpha}{n}$. Como la función confluyente ${}_1F_1(a, c; x)$ es la solución analítica de (1.23) tomamos

$$f(x) = \binom{n + \alpha}{n} {}_1F_1(-n, \alpha + 1; x).$$

□

Proposición 1.4.2. La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre $\{L_n^\alpha(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n! e^{-x} x^\alpha} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{n+\alpha}]. \quad (1.24)$$

Demostración. Por definición, para $n \in \mathbb{N}_0$, $L_n^\alpha(x)$ es una función de tipo hipergeométrico, es decir, es solución de un operador diferencial del tipo (1.11), donde $\sigma(x) = x$, $\tau(x) = \alpha + 1 - x$ y $\lambda_n = n$. De acuerdo a la proposición (1.3.7), sus derivadas también lo son, y su derivada n -ésima satisface la ecuación diferencial

$$\sigma(x)y_n''(x) + \tau_n(x)y_n'(x) + \mu_n y_n(x) = 0, \quad (1.25)$$

donde $\tau_n(x) = n + \alpha + 1 - x$ y $\mu_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Notemos que para $n = 0$, $\mu_0 = n$ y (1.25) coincide con (1.21). Luego, multiplicando por una función apropiada $\rho_n(x)$, la ecuación diferencial (1.21) se puede escribir en la forma autoadjunta

$$(x\rho_n(x)y_n'(x))' = 0, \quad (1.26)$$

donde $\rho_n(x)$ verifica

$$(x\rho_n(x))' = (n + \alpha + 1 - x)\rho_n(x).$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, tenemos

$$\rho_n(x) = x^{n+\alpha}e^{-x}.$$

En particular, $\rho(x) = \rho_0(x) = x^\alpha e^{-x}$.

Reemplazando estos valores en (1.20) y tomando $B_n = \frac{1}{n!}$, obtenemos que la fórmula de Rodrigues para la familia de Laguerre está dada por

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!e^{-x}x^\alpha} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x}x^{n+\alpha}].$$

□

Observación. La elección $B_n = \frac{1}{n!}$ se elige por razones históricas, pero podría ser arbitrario.

Proposición 1.4.3. *La familia de polinomios de Laguerre $\{L_n^\alpha(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es ortogonal respecto a la función de peso $w(x) = e^{-x}x^\alpha$ para $x \in [0, \infty)$ y $\alpha > -1$.*

Demostración. Para verificar que $w(x) = e^{-x}x^\alpha$ es el peso que hace ortogonal a la familia de Laguerre, consideramos el producto interno

$$\int_0^\infty L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)w(x)dx.$$

Sustituimos $L_n^\alpha(x)$ por la expresión dada en (1.24) y realizamos integración por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)w(x)dx &= \int_0^\infty L_m^\alpha(x) \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x}x^{\alpha+n}] dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty (L_m^\alpha)^{(n)} e^{-x}x^{\alpha+n} dx. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Si $n = m$,

$$\begin{aligned} (L_n^\alpha)^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n, \alpha+1; x) \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha-n+1)} \frac{(-n)_n}{(\alpha+1)_n} {}_1F_1(-n+n, \alpha+1+n; x) \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Reemplazamos esta igualdad en (1.27),

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(x)w(x)dx = \frac{(-1)^{2n}}{n!} \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha+n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

Si $m \neq n$, suponemos sin pérdida de generalidad $m < n$, entonces, $(L_m^\alpha)^{(n)}(x) = 0$. Por lo tanto, (1.27) se anula. □

Proposición 1.4.4. *La familia de polinomios de Laguerre $\{L_n^\alpha(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, con $x \in [0, \infty)$ y $\alpha > -1$, satisface la siguiente relación de recurrencia de tres términos para $n \geq 0$:*

$$xL_n^\alpha(x) = -(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (2n+\alpha+1)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x),$$

con las condiciones iniciales $L_{-1}^\alpha(x) = 0$, $L_0^\alpha(x) = 1$.

Demostración. Por el teorema (1.3.5), la familia $\{L_n^\alpha(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ verifica una relación de recurrencia de la forma

$$xL_n^\alpha(x) = \lambda_{n+1}L_{n+1}^\alpha(x) + \lambda_n L_n^\alpha(x) + \lambda_{n-1}L_{n-1}^\alpha(x), \quad (1.28)$$

donde $L_{-1}^\alpha(x) = 0$, $L_0^\alpha(x) = \gamma_0 = 1$.

Comparando el coeficiente principal de cada lado de la igualdad, $\gamma_n = \lambda_{n+1}\gamma_{n+1}$, y sabiendo que para esta familia

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(n+2)}, \\ \gamma_n &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}, \\ \gamma_{n-1} &= \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}, \end{aligned}$$

obtenemos que la expresión de λ_{n+1} es

$$\lambda_{n+1} = \frac{(-1)^n \Gamma(n+2)}{(-1)^{n+1} \Gamma(n+1)} = -(n+1).$$

Para obtener λ_n consideramos el producto interno entre $xL_n^\alpha(x)$ y $L_n^\alpha(x)$. Por medio de (1.28) se tiene

$$\begin{aligned} \langle xL_n^\alpha(x), L_n^\alpha(x) \rangle &= \langle \lambda_{n+1}L_{n+1}^\alpha(x) + \lambda_n L_n^\alpha(x) + \lambda_{n-1}L_{n-1}^\alpha(x), L_n^\alpha(x) \rangle \\ &= \lambda_n \|L_n^\alpha(x)\|^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Por otro lado, para calcular dicho producto reescribimos la relación (i) de la proposición (1.2.2) como

$${}_1F_1(a, c; x) = \frac{a {}_1F_1(a+1) - (c-1) {}_1F_1(c-1)}{c-a-1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha+1}(x) &= \binom{n+\alpha+1}{n} {}_1F_1(-n, \alpha+2) \\ &= \binom{n+\alpha+1}{n} \frac{-n {}_1F_1(-n+1, \alpha+2) - (\alpha+1) {}_1F_1(-n, \alpha+1)}{\alpha+2+n-1} \\ &= \frac{-\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+2)} \left(\frac{n {}_1F_1(-n+1, \alpha+2) - (\alpha+1) {}_1F_1(-n, \alpha+1)}{n+\alpha+1} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Reemplazando las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \binom{n-1+\alpha+1}{n-1} &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+2)}, \\ \binom{n+\alpha}{n} &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

en (1.30) obtenemos

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha+1}(x) &= -\frac{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{n\Gamma(n)\Gamma(\alpha+2)} \frac{n}{\alpha+n+1} {}_1F_1(-n+1, \alpha+2) - \\ &\quad - \frac{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \frac{\alpha+1}{n+\alpha+1} {}_1F_1(-n, \alpha+1) \\ &= -L_{n-1}^{\alpha+1}(x) - L_n^\alpha(x). \end{aligned}$$

De aquí, despejamos $L_n^\alpha(x)$ y sustituimos su expresión en el producto interno

$$\begin{aligned}
\langle xL_n^\alpha(x), L_n^\alpha(x) \rangle &= \int_0^\infty (L_n^\alpha(x))^2 e^{-x} x^{\alpha+1} dx \\
&= \int_0^\infty (-L_{n-1}^{\alpha+1}(x) - L_n^{\alpha+1}(x))^2 e^{-x} x^{\alpha+1} dx \\
&= \|L_{n-1}^{\alpha+1}(x)\|^2 + \|L_n^{\alpha+1}(x)\|^2 \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-1)!} + \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!} \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} (2n+\alpha+1) \\
&= \|L_n^\alpha(x)\|^2 (2n+\alpha+1).
\end{aligned}$$

Comparando este resultado con (1.4), se deduce que

$$\lambda_n = 2n + \alpha + 1.$$

Finalmente, para hallar λ_{n-1} consideramos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle L_{n+1}^\alpha(x), L_{n-1}^\alpha(x) \rangle \\
&= \frac{1}{\lambda_{n+1}} \langle xL_n^\alpha(x) - \lambda_n L_n^\alpha(x) - \lambda_{n-1} L_{n-1}^\alpha(x), L_{n-1}^\alpha(x) \rangle \\
&= \frac{1}{\lambda_{n+1}} (\langle L_n^\alpha(x), xL_{n-1}^\alpha(x) \rangle - \lambda_{n-1} \|L_{n-1}^\alpha(x)\|^2).
\end{aligned}$$

De aquí se tiene que

$$\lambda_{n-1} = \frac{\langle L_n^\alpha(x), xL_{n-1}^\alpha(x) \rangle}{\|L_{n-1}^\alpha(x)\|^2}.$$

Como $xL_{n-1}^\alpha(x)$ es un polinomio de grado n , se puede escribir como combinación lineal de $\{L_i^\alpha(x)\}$, $i = 0, \dots, n$,

$$xL_{n-1}^\alpha(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{\lambda}_i L_i^\alpha(x),$$

con lo cual el producto interno entre $xL_{n-1}^\alpha(x)$ y $L_n^\alpha(x)$ queda determinado por

$$\begin{aligned}
\langle L_n^\alpha(x), xL_{n-1}^\alpha(x) \rangle &= \sum_{i=0}^n \tilde{\lambda}_i \langle L_n^\alpha(x), L_i^\alpha(x) \rangle \\
&= \tilde{\lambda}_n \|L_n^\alpha(x)\|^2.
\end{aligned}$$

Comparamos los coeficientes principales de la combinación lineal anterior, $\gamma_{n-1} = \tilde{\lambda}_n \gamma_n$, y se tiene

$$\lambda_{n-1} = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \frac{\|L_n^\alpha(x)\|^2}{\|L_{n-1}^\alpha(x)\|^2} = -(\alpha + n).$$

□

Proposición 1.4.5. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ los polinomios de Laguerre $\{L_n^\alpha(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ verifican la siguiente relación con su derivada

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x),$$

donde $L_{-1}^{\alpha+1}(x) = 0$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Utilizando la expresión (1.22) y la proposición (1.2.3), la derivada de $L_n^\alpha(x)$ es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) &= \frac{d}{dx} \left[\binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n, \alpha+1; x) \right] \\ &= \binom{n+\alpha}{n} \frac{(-n)}{\alpha+1} {}_1F_1(-n+1, \alpha+2; x) \\ &= -\binom{n+\alpha}{n} \frac{n}{\alpha+1} {}_1F_1(-(n-1), (\alpha+1)+1; x) \\ &= -\binom{n+\alpha}{n} \frac{n}{\alpha+1} \binom{n+\alpha}{n-1}^{-1} L_{n-1}^{\alpha+1}(x). \end{aligned}$$

Desarrollamos el cociente

$$\begin{aligned} \binom{n+\alpha}{n} \frac{n}{\alpha+1} \binom{n+\alpha}{n-1}^{-1} &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha-n+1)} \frac{\Gamma(n-1+1)\Gamma(n+\alpha-n+1+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{n}{\alpha+1} \\ &= \frac{n\Gamma(n)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce la relación

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

□

Capítulo 2

Caso Matricial

2.1. Función Hipergeométrica Matricial

En el capítulo anterior vimos la relación de la función hipergeométrica y su ecuación diferencial con las familias de polinomios clásicos. En esta sección estudiaremos la ecuación hipergeométrica matricial introducida por Tirao [77]. Esta ecuación surge en el estudio de funciones esféricas matriciales y en la teoría de polinomios ortogonales matriciales.

Definición 2.1.1. Para $U, V, C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$ y $z \in \mathbb{C}$ definimos la función hipergeométrica matricial como

$${}_2H_1(C, U, V; z) = \sum_{k=0}^{\infty} [C, U, V]_k \frac{z^k}{k!},$$

donde $[C, U, V]_k \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ se define inductivamente por

$$\begin{aligned} [C, U, V]_0 &= I, \\ [C, U, V]_{k+1} &= (C + kI)^{-1} [k^2 I + k(U - I) + V] [C, U, V]_k \quad (k \geq 0) \end{aligned}$$

Teorema 2.1.1. Para $U, V, C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ y $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$, el espacio de soluciones de la ecuación

$$z(1-z)f''(z) + (C - zU)f'(z) - Vf(z) = 0 \quad (2.1)$$

tiene como conjunto fundamental de soluciones a $\{{}_2H_1(C, U, V; z)F_1, {}_2H_1(C, U, V; z)F_2\}$, donde $\{F_1, F_2\}$ es una base de $\mathbb{C}^{2 \times 1}$.

2.2. Función Hipergeométrica Confluente Matricial

Así como la función hipergeométrica se puede generalizar al caso matricial, también la función confluente. Del paper “The Generalized Matrix Valued Hypergeometric Equation” de P. Román y S. Simondi [71], tenemos los siguientes resultados:

Definición 2.2.1. Para $A, C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$ y $z \in \mathbb{C}$ definimos la función confluyente matricial como

$${}_1F_1(A, C; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{A}{C}_k \frac{z^k}{k!},$$

donde $\binom{A}{C}_k \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ se define inductivamente por

$$\begin{aligned} \binom{A}{C}_0 &= I, \\ \binom{A}{C}_{k+1} &= (C + kI)^{-1}(A + kI) \binom{A}{C}_k \quad (k \geq 0) \end{aligned}$$

Teorema 2.2.1. Si $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$ y $F_0 \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$, entonces la función $f(z) = {}_1F_1(A, C; z)F_0$ es una solución de la ecuación diferencial

$$zf''(z) + (C - zI)f'(z) - Af(z) = 0 \quad (2.2)$$

tal que $f(0) = F_0$. Recíprocamente, toda solución analítica en $z = 0$ es de esta forma.

2.3. Polinomios Ortogonales Matriciales

En esta sección estudiaremos la generalización de los polinomios ortogonales al caso matricial. Se detallan los resultados más relevantes de la teoría de polinomios ortogonales matriciales e introducimos familias de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de un operador diferencial.

Si bien es una teoría que generaliza al caso escalar, la no conmutatividad de matrices genera una dificultad adicional que no se encuentra en el caso clásico.

Definición 2.3.1. Sea \mathbb{C}^N el conjunto de vectores con N coeficientes complejos y $\mathbb{C}^{N \times N}$ el \mathbb{C} -módulo izquierdo formado por todas las matrices cuadradas de dimensión $N \times N$ con coeficientes complejos. Denotamos por $\mathbb{C}^{N \times N}[x]$ al espacio vectorial complejo formado por todos los polinomios de una variable real con coeficientes matriciales, es decir,

$$\mathbb{C}^{N \times N}[x] = \{P(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 : A_i \in \mathbb{C}^{N \times N} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Si A_n es distinta de la matriz nula, $gr(P) = n$ es el grado del polinomio $P(x)$ y A_n es su coeficiente principal. Además, si A_n es la matriz identidad, el polinomio se denomina mónico. Así, un polinomio matricial P en la variable real x puede interpretarse como una matriz $N \times N$ cuyos elementos son polinomios en x de grado a lo sumo n .

Observación. Todo polinomio con coeficiente principal no singular puede convertirse en mónico premultiplicando por A_n^{-1} .

En adelante, el símbolo 0 se utilizará tanto para el cero escalar como para la matriz nula, cuyo tamaño debe interpretarse a partir del contexto.

Definición 2.3.2. Una función $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ es un peso matricial si satisface las siguientes condiciones:

- (i) $W(x)$ es integrable en un intervalo (a, b) tal que $W(x)$ es definida positiva en casi todo punto, donde una matriz $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$ se dice definida positiva si $t^*Mt > 0$ para todo $t \in \mathbb{C}^N$ no nulo y A^* es la matriz tanspuesta conjugada de A .
- (ii) Los momentos $\int_{\mathbb{R}} x^n dW(x)$ existen y son finitos para todo $n \in \mathbb{N}_0$.
- (iii) La matriz W es no degenerada, esto es: para $P \in \mathbb{C}^{N \times N}[x]$

$$\langle P, P \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P^*(x) dW(x) P(x) = 0$$

sólo si $P = 0$.

Definición 2.3.3. Dado un peso matricial $W(x)$, el producto interno matricial es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_W : \mathbb{C}^{N \times N}[x] \times \mathbb{C}^{N \times N}[x] \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ tal que para todo $P, Q, R, S \in \mathbb{C}^{N \times N}[x]$ y $A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}$ satisface las siguientes propiedades:

- (i) $\langle P, P \rangle_W$ definida positiva y $\langle P, P \rangle_W = 0$ si y sólo si $P = 0$,
- (ii) $\langle P, Q \rangle_W = \langle Q, P \rangle_W^*$,
- (iii) $\langle PA, QB \rangle_W = A^* \langle P, Q \rangle_W B$,
- (iv) $\langle P + Q, R + S \rangle_W = \langle P, R \rangle_W + \langle Q, R \rangle_W + \langle P, S \rangle_W + \langle Q, S \rangle_W$.

Estas propiedades implican que $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ es una forma sesquilineal hermítica en $\mathbb{C}^{N \times N}[x]$.

Proposición 2.3.1. Dado un peso matricial $W(x)$,

$$\langle P(x), Q(x) \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P^*(x) dW(x) Q(x)$$

es un producto interno en $\mathbb{C}^{N \times N}[x]$.

Demostración. Sean $P, Q, R, S \in \mathbb{C}^{N \times N}[x]$ y $A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}$.

- (i) Para corroborar que $\langle P, P \rangle_W$ es definida positiva, consideramos un vector $t \in \mathbb{C}^N$ y hacemos

$$\begin{aligned} t^* \langle P, P \rangle_W t &= \int_{\mathbb{R}} t^* P^*(x) dW(x) P(x) t \\ &= \int_{\mathbb{R}} (P(x)t)^* dW(x) (P(x)t). \end{aligned}$$

Como $P(x)t \in \mathbb{C}^N$ y $dW(x)$ es definida positiva, se sigue que $\langle P, P \rangle_W$ lo es.

Por otro lado, es claro por la definición de la integral matricial que si $P = 0$, el producto $\langle P, P \rangle_W$ se anula. Finalmente, si $\langle P, P \rangle_W = 0$, usando que el peso es una matriz definida positiva se sigue que $P = 0$.

(ii) De que W es definida positiva, tenemos que $W^*(x) = W(x)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle P, Q \rangle_W &= \int_{\mathbb{R}} P^*(x)W(x)Q(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} P^*(x)W^*(x)Q^{**}(x)dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} Q^*(x)W(x)P(x)dx \right)^* \\ &= \langle Q, P \rangle_W^*.\end{aligned}$$

(iii) Usando las propiedades de adjunto

$$\begin{aligned}\langle PA, QB \rangle_W &= \int_{\mathbb{R}} (P(x)A)^*W(x)(Q(x)B)dx \\ &= A^* \left(\int_{\mathbb{R}} P^*(x)W(x)Q(x)dx \right) B \\ &= A^* \langle P, Q \rangle_W B.\end{aligned}$$

$$(iv) \langle P + Q, R + S \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} (P(x) + Q(x))^*W(x)(R(x) + S(x))dx$$

Como $(P(x) + Q(x))^* = P^*(x) + Q^*(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\langle P + Q, R + S \rangle_W &= \int_{\mathbb{R}} P^*(x)W(x)R(x) + P^*(x)W(x)S(x) + \\ &\quad + Q^*(x)W(x)R(x) + Q^*(x)W(x)S(x)dx \\ &= \langle P, R \rangle_W + \langle Q, R \rangle_W + \langle P, S \rangle_W + \langle Q, S \rangle_W.\end{aligned}$$

□

Observación. La función $(P, Q)_W = \int_{\mathbb{R}} P(x)dW(x)Q^*(x) = \langle P^*, Q^* \rangle_W$ también es una forma sesquilineal hermítica.

Definición 2.3.4. Dados W un peso matricial y $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ un producto interno, decimos que una familia de polinomios matriciales $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}^{N \times N}[x]$ es ortogonal respecto a W si

(i) $P_n(x)$ es un polinomio de grado n para $n \geq 0$.

$$(ii) \langle P_n(x), P_m(x) \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P_n(x)^* dW(x)P_m(x)W(x)dx = K_n \delta_{n,m},$$

donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker y $K_n = \langle P_n(x), P_n(x) \rangle_W$ es la norma de P_n .

Si además, K_n es la matriz identidad, los polinomios se dicen ortonormales.

Prosiguiendo con la generalización de los polinomios ortogonales clásicos, A. Lopes Branquinho y A. Foulquie Moreno [62] hallaron un resultado que generaliza el Teorema de Favard para el caso matricial.

Teorema 2.3.2 (Teorema de Favard Generalizado). *Sea $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios matriciales en $\mathbb{C}^{N \times N}[x]$ que satisface la siguiente relación de recurrencia de tres términos:*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x)A_{n+1} + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n^* \quad (n \geq 0), \quad (2.3)$$

con las condiciones iniciales $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = I$, y donde A_n es una matriz no singular para $n \in \mathbb{N}$ y B_n es hermítica para $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces, existe un peso matricial W que hace ortonormal a la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Recíprocamente, toda familia de polinomios ortonormales verifica una relación de recurrencia de tres términos.

Demostración. Notemos que la relación (2.3) determina una sucesión $\{P_n(x)\}$ recursivamente desde las condiciones iniciales $P_0(x) = I$ y $P_{-1}(x) = 0$.

Para $n = 0$ encontramos que $P_1(x) = (xI - B_0)A_1^{-1}$, y si $P_n(x)$ es de grado n con coeficiente principal T_n , $P_{n+1}(x)$ es de grado $n + 1$ con coeficiente principal $T_{n+1} = T_n A_{n+1}^{-1}$.

Usando que $\{P_n(x)\}$ es una sucesión, definimos un producto interno matricial como

$$\left\langle \sum P_k C_k(x), \sum P_k(x) D_k \right\rangle = \sum C_k^* D_k.$$

Como $\{P_n(x)\}$ es una familia ortonormal respecto a este producto interno, es no degenerado.

Afirmamos que para $P, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[x]$ se cumple que

$$\langle xP(x), Q(x) \rangle = \langle P(x), xQ(x) \rangle, \quad (2.4)$$

para lo cual basta probar que $\langle xP_n(x), P_m(x) \rangle = \langle P_n(x), xP_m(x) \rangle$, que es una consecuencia de la relación de recurrencia.

Para $n \geq 0$ definimos $S_n = \langle Ix^n, I \rangle$. Por (2.4) tenemos que $S_n = \langle Ix^i, Ix^j \rangle$ si $i + j = n$, y en particular

$$S_n = \langle I, Ix^n \rangle = \langle Ix^n, I \rangle^* = S_n^*.$$

Para todo polinomio matricial $P(x) = \sum C_k x^k$ tenemos además que

$$\langle P(x), P(x) \rangle = \sum_{k,l} C_k^* \langle Ix^k, Ix^l \rangle C_l$$

es definida positiva, con lo cual $\{S_n\}$ es definida positiva.

Por teorema de Krein [59, 60] el producto interior está dado por algún peso W . □

Cuando los polinomios ortogonales son mónicos la relación de recurrencia (2.3) está dada en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.3. *Sea $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios ortogonales mónicos. Entonces, satisfacen una relación de recurrencia de tres términos de la forma*

$$xQ_n(x) = Q_{n+1}(x)I + Q_n(x)\tilde{B}_n + Q_{n-1}(x)\tilde{A}_n, \quad (2.5)$$

donde $\tilde{A}_n = S_{n-1}^{-1}S_n$ y $S_n\tilde{B}_n$ hermítico para $S_n = D_n^*D_n$ y $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ no singulares.

Demostración. Como los polinomios $\{Q_n(x)\}$ son mónicos, existen matrices no singulares $\{D_n\}$ y polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$ tales que $Q_n(x) = P_n(x)D_n$ para todo $n \geq 0$. Reemplazamos esta expresión de $Q_n(x)$ en (2.5) y, usando que $\{D_n\}$ son no singulares se tiene

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x)D_{n+1}D_n^{-1} + P_n(x)D_n\tilde{B}_nD_n^{-1} + P_{n-1}(x)D_{n-1}\tilde{A}_nD_n^{-1}.$$

Reescribimos los coeficientes como

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= D_{n+1}D_n^{-1}, \\ B_n &= D_n\tilde{B}_nD_n^{-1}, \\ C_n &= D_{n-1}\tilde{A}_nD_n^{-1}. \end{aligned}$$

Como los polinomios $\{P_n(x)\}$ son ortogonales, B_n debe ser hermítico y $C_n = A_n^*$.

De que B_n es hermítico se sigue que

$$D_n\tilde{B}_nD_n^{-1} = (D_n\tilde{B}_nD_n^{-1})^* = (D_n^*)^{-1}\tilde{B}_n^*D_n^*,$$

y, premultiplicando por D_n^* y multiplicando por D_n ,

$$D_n^*D_n\tilde{B}_n = \tilde{B}_n^*D_n^*D_n = (D_n^*D_n\tilde{B}_n)^*,$$

Por lo tanto, $D_n^*D_n\tilde{B}_n = S_n\tilde{B}_n$ es hermítico.

De que $C_n = A_n^*$ tenemos que

$$D_{n-1}\tilde{A}_nD_n^{-1} = (D_nD_{n-1}^{-1})^* = (D_{n-1}^*)^{-1}D_n^*.$$

Despejamos \tilde{A}_n de dicha expresión,

$$\tilde{A}_n = D_{n-1}^{-1}(D_{n-1}^*)^{-1}D_n^*D_n = (D_{n-1}^*D_{n-1})^{-1}(D_n^*D_n).$$

Luego, $\tilde{A}_n = S_{n-1}^{-1}S_n$. □

Como consecuencia de esta proposición, el Teorema de Favard para polinomios mónicos puede reescribirse de la siguiente manera, aunque se pierde la ortonormalidad de la familia.

Teorema 2.3.4. *Sea $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios matriciales mónicos que satisface la relación de recurrencia (2.5), con las condiciones iniciales $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = I$. Entonces, existe un peso matricial W que hace ortogonal a la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.*

En el primer capítulo de este trabajo se hizo alusión a las familias de polinomios ortogonales clásicas, las cuales se caracterizan por ser autofunciones de un operador diferencial de tipo hipergeométrico, de acuerdo con la clasificación de Bochner. Siguiendo este lineamiento, se puede generalizar el problema de Bochner al caso matricial: Determinar todos los pesos matriciales $W(x)$ tales que existe un operador diferencial de segundo orden para el cual la sucesión asociada de polinomios ortogonales matriciales mónicos es autofunción. Esto ha conducido al estudio del álgebra de los operadores diferenciales asociados a un peso [11, 13, 57].

En lo que resta de este trabajo nos centraremos en las familias de polinomios ortogonales que son autofunción de operadores diferenciales de segundo orden. Sin embargo, existe un estudio sobre operadores diferenciales de orden superior.

En vista de este hecho, consideremos las siguientes deficiones que se encuentran en [29].

Definición 2.3.5. Un operador diferencial de segundo orden se dice a izquierda si se escribe como combinación lineal de productos de funciones de x multiplicadas en el lado izquierdo de las potencias del operador diferencial, es decir,

$$D_L = A_2 \frac{d^2}{dx^2} + A_1 \frac{d}{dx} + A_0 \frac{d^0}{dx^0}.$$

Análogamente, un operador diferencial a derecha es de la forma

$$D_R = \frac{d^2}{dx^2}A_2 + \frac{d}{dx}A_1 + \frac{d^0}{dx^0}A_0.$$

Definición 2.3.6. Sea W un peso matricial y D un operador diferencial de segundo orden a izquierda. Decimos que el par (D, W) es simétrico si para cualquier polinomio matricial P y Q se cumple

$$\langle DP, Q \rangle_W = \langle P, DQ \rangle_W.$$

Definición 2.3.7. Un peso matricial W se dice que reduce a un orden menor si existe una matriz M no singular tal que

$$W(x) = M \begin{pmatrix} W_1(x) & 0 \\ 0 & W_2(x) \end{pmatrix} M^*,$$

donde $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son pesos de órdenes menores. Notemos que los polinomios matriciales que son ortonormales con respecto a $W(x)$ son de la forma

$$P_n(x) = \begin{pmatrix} P_{n,1}(x) & 0 \\ 0 & P_{n,2}(x) \end{pmatrix} M^{-1}, \quad (n \geq 0),$$

donde $\{P_{n,i}\}_n$ son polinomios matriciales ortonormales con respecto a $W_i(x)$, $i = 1, 2$.

Una vez establecidos estos conceptos, se pueden obtener condiciones equivalentes a cada uno de ellos. En el teorema (2.3.5) se enunciará un criterio de reducibilidad para un peso matricial, que fue dado por J. Tirao y I. Zurrián en [79]. Mientras que el teorema (2.3.6) abordará las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la simetría de un peso matricial. Este resultado se debe a A. Durán y F. Grünbaum, y se encuentra en [29].

Teorema 2.3.5. Sea W un peso matricial en (a, b) y

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n$$

la relación de recurrencia de tres términos que satisface la familia de polinomios ortogonales matriciales mónicos $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Si W reduce, entonces existe una matriz no escalar que conmuta con $\{A_n, B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Más aún, si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces también se verifica el recíproco.

Teorema 2.3.6. Sean $D = d^2A_2(x) + dA_1(x) + A_0(x)$ un operador diferencial a izquierda y W un peso matricial con soporte (a, b) . Entonces, D es simétrico respecto a W si y sólo si

(i) se verifican las igualdades

$$W(x)A_2(x) = A_2^*(x)W(x), \quad (2.6)$$

$$2(W(x)A_2(x))' = A_1^*(x)W(x) + W(x)A_1(x), \quad (2.7)$$

$$(W(x)A_2(x))'' - (W(x)A_1(x))' + W(x)A_0(x) = A_0^*(x)W(x), \quad (2.8)$$

(ii) y los límites de

$$W(x)A_2(x) \quad y \quad (W(x)A_2(x))' - W(x)A_1(x)$$

se anulan en los extremos del soporte de $W(x)$.

A modo de ilustración veremos dos ejemplos de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de un operador diferencial de tipo hipergeométrico, hallados por métodos distintos. El ejemplo (2.3.8) fue dado por I. Pacharoni e I. Zurrián en el paper “Matrix Ultraspherical Polynomials: The 2×2 Fundamental Cases” [69]; pero también puede encontrarse en “Spherical Functions of Fundamental K -types Associated with the n -dimensional Sphere” [78]. La familia hallada surge del estudio de las funciones esféricas de tipo fundamental asociadas al par $(SO(n+1), SO(n))$.

Por otro lado, M. Castro y F. Grünbaum exhibieron un ejemplo del álgebra de operadores diferenciales que tienen como autofunción a una familia de polinomios ortogonales matriciales. Esto se encuentra en el paper “The Algebra of Differential Operators Associated to a Family of Matrix-Valued Orthogonal Polynomials: Five Instructive Examples” [13], y aquí se muestra en el ejemplo (2.3.9).

Ejemplo 2.3.8. Sea $0 < p < n$. Dado el operador diferencial a derecha

$$D = \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) (1 - x^2) - \left(\frac{d}{dx} \right) \left((n+2)x + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & n-p \end{pmatrix},$$

las soluciones de la ecuación

$$P_w(x)D = \Delta_w P_w(x)$$

son polinomios ortogonales matriciales, donde el autovalor es la matriz diagonal

$$\Delta_w = \begin{pmatrix} -w(w+n+1) - p & 0 \\ 0 & -w(w+n+1) - n+p \end{pmatrix}.$$

Esta familia reduce al caso escalar si $p = \frac{n}{2}$.

Ejemplo 2.3.9. Sea $\{P_n(x)\}$ una familia de polinomios matriciales ortogonales respecto a un peso matricial de la forma $x^\alpha e^{-x} e^{Ax} e^{A^*x}$, donde $\alpha > -1$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$ no nulo. El único operador diferencial de segundo orden que tiene a $P_n(x)$ como autofunción es

$$D = \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \left(\frac{d}{dx} \right) \begin{pmatrix} 1 + \alpha - x & 2ax \\ 0 & 1 + \alpha - x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & a(\alpha+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y estos polinomios son soluciones al problema

$$P_n D = \Delta_n P_n,$$

donde el autovalor es la matriz

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} -(n+1) & a(2n+\alpha+1) \\ 0 & -n \end{pmatrix}.$$

2.4. Ad-Conditions

En esta sección se aborda la íntima relación que existe entre operadores diferenciales y operadores en diferencia, que tienen a una misma familia de polinomios ortogonales matriciales como autofunción. Este hecho se conoce como problema biespectral matricial y se enuncia de la siguiente manera:

Problema: Encontrar todas las funciones matriciales no triviales $\Phi_j(x)$ que dependen de dos variables n (discreta) y x (continua), y que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Phi_n(x)L &= x\Phi_n(x) \\ D\Phi_n(x) &= \Phi_n(x)\Delta_n \end{aligned}$$

donde L es un operador en diferencia de segundo orden, D es un operador diferencial de orden $m \geq 0$ y Δ_n es una matriz.

Notemos que como ambos operadores tienen coeficientes matriciales, la única forma de hacerlos conmutar es que actúen en diferentes lados del argumento Φ_n .

En este trabajo consideramos L una matriz bloque tridiagonal, Δ una matriz bloque diagonal y $P(x)$ un vector, e introducimos la siguiente notación:

$$L = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & & & \\ I & B_1 & A_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_0 & & & & \\ & \Delta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad P(x) = (P_0(x) \ P_1(x) \ \cdots).$$

El siguiente resultado se enmarca en la teoría de operadores diferenciales desarrollada en [52,57]. Allí, $\mathcal{D}(W)$ denota el álgebra de los operadores diferenciales a izquierda con coeficientes matriciales que tienen como autofunciones familias de polinomios ortogonales; mientras que $\Delta_n = \Delta_n(D)$ significa que el autovalor Δ_n está unívocamente determinado por D . Además,

$$(\text{ad } P)(Q) = [P, Q] = PQ - QP$$

es el conmutador de los operadores P y Q .

Teorema 2.4.1. *Sea $W(x)$ un peso matricial sobre los reales, $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada y L la matriz bloque tridiagonal tal que $PL = xP$. Si $D \in \mathcal{D}(W)$ y Δ es la matriz bloque diagonal anterior con $\Delta_n = \Delta_n(D)$, entonces*

$$(\text{ad } L)^{m+1}(\Delta) = 0, \tag{2.9}$$

para algún m . Recíprocamente, si Δ es una matriz bloque diagonal que satisface esta condición para algún $m \geq 0$, entonces existe un único operador diferencial D en $\mathcal{D}(W)$ tal que $\Delta_n = \Delta_n(D)$ para todo $n \geq 0$. Más aún, el orden de D es igual al mínimo m que satisface (2.9).

Capítulo 3

Polinomios Confluentes Matriciales

El presente capítulo representa el quid de este trabajo, ya que introducimos resultados inéditos. En el mismo presentamos un método que nos permite hallar familias de polinomios ortogonales matriciales mónicos de tipo confluyente, es decir, que son autofunciones de la ecuación diferencial

$$xP_n''(x) + (C - xI)P_n'(x) - VP_n(x) = P_n(x)\Delta_n, \quad x \in [0, \infty) \quad (3.1)$$

donde V , C y Δ_n son matrices en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, tales que $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$ y el autovalor Δ_n es diagonal.

En la siguiente proposición se dan las condiciones necesarias para que las autofunciones de la ecuación diferencial (3.1) sean polinomios matriciales mónicos.

Proposición 3.0.1. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios matriciales mónicos en $\mathbb{C}^{2 \times 2}[x]$ tal que el grado de $P_n(x)$ es n y $P_n(x)$ es autofunción de la ecuación diferencial (3.1) para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Si las matrices V , C y Δ_n en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ son tales que $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$ y el autovalor está dado por la matriz diagonal*

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix},$$

entonces, V es diagonal y Δ_n está definido por

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -n - v_{11}, \\ \mu_n &= -n - v_{22}, \end{aligned}$$

donde v_{11} y v_{22} son los elementos de la diagonal de V .

Demostración. Sea $V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$.

Proponemos el polinomio $P_n(x) = Ix^n + T_{n-1}x^{n-1} + \dots + T_0$ de grado n . Sus derivadas de primer y segundo orden son

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= nIx^{n-1} + (n-1)T_{n-1}x^{n-2} + \dots + T_1, \\ P_n''(x) &= n(n-1)Ix^{n-2} + (n-1)(n-2)T_{n-1}x^{n-3} + \dots + 2T_2. \end{aligned}$$

Si sustituimos estas expresiones en la ecuación diferencial (3.1), el coeficiente de x^n resulta ser $-nI - V = \Delta_n$, de donde obtenemos las siguientes relaciones para todo $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} -n - v_{11} &= \lambda_n, \\ -v_{12} &= 0, \\ -v_{21} &= 0, \\ -n - v_{22} &= \mu_n. \end{aligned}$$

□

Observación. Si a la ecuación diferencial (3.1) le sumamos en ambos miembros de la igualdad $\alpha P_n(x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, obtenemos la ecuación diferencial

$$xP_n''(x) + (C - xI)P_n'(x) - (V - \alpha I)P_n(x) = P_n(x)(\Delta_n + \alpha I), \quad (3.2)$$

para la cual toda autofunción también lo es de la ecuación diferencial (3.1).

Por lo tanto, la sucesión $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es autofunción en simultáneo de la ecuación (3.1) y de (3.2). Por esta razón, consideraremos que $\alpha = v_{22}$, $v = v_{11} - v_{22}$ y tomaremos

$$V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} -v - n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix},$$

sin perder generalidad en el cálculo de familias de autofunciones de la ecuación diferencial.

El próximo resultado establece la expresión algebraica que deben tener las autofunciones de la ecuación diferencial (3.1) para que sean analíticas en el origen y también se introducen las condiciones necesarias para que dichas soluciones sean polinomiales.

Proposición 3.0.2. Sean F_n, G_n funciones con valores en \mathbb{C}^2 y $\mathcal{F}_n(x) = [F_n(x) : G_n(x)]$ una autofunción de la ecuación diferencial (3.1) analítica en el origen, definida en el intervalo $[0, \infty)$. Si $V, C, \Delta_n \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ tales que V es diagonal, $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$, y el autovalor es

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix},$$

con $\lambda_n = -n - v$ y $\mu_n = -n$, entonces la función $\mathcal{F}_n(x)$ está definida por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} F_0^{(n)}, \\ G_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} G_0^{(n)}, \end{aligned}$$

para $F_0^{(n)}, G_0^{(n)} \in \mathbb{C}^2$ tales $F_n(0) = F_0^{(n)}$ y $G_n(0) = G_0^{(n)}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}_n(x) = [F_n(x) : G_n(x)]$. Dado que

$$\frac{d^i}{dx^i} [F_n(x) : G_n(x)] = \left[\frac{d^i}{dx^i} F_n(x) : \frac{d^i}{dx^i} G_n(x) \right] \quad (i = 1, 2),$$

la ecuación diferencial (3.1) se puede expresar de la siguiente manera,

$$x \left[\frac{d^2}{dx^2} F_n(x) \dot{=} \frac{d^2}{dx^2} G_n(x) \right] + (C - xI) \left[\frac{d}{dx} F_n(x) \dot{=} \frac{d}{dx} G_n(x) \right] - V[F_n(x) \dot{=} G_n(x)] = [F_n(x) \dot{=} G_n(x)] \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Luego, igualando por columnas la ecuación anterior, se obtiene que la ecuación diferencial (3.1) queda determinada por dos ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned} xF_n''(x) + (C - xI)F_n'(x) - (V + \lambda_n I)F_n(x) &= 0, \\ xG_n''(x) + (C - xI)G_n'(x) - (V + \mu_n I)G_n(x) &= 0, \end{aligned}$$

para las cuales, por el teorema (2.2.1), una solución analítica está dada por

$$F_n(x) = {}_1F_1(V + \lambda_n I, C; x)F_0^{(n)}, \quad (3.3)$$

$$G_n(x) = {}_1F_1(V + \mu_n I, C; x)G_0^{(n)}, \quad (3.4)$$

con $F_0^{(n)}, G_0^{(n)} \in \mathbb{C}^2$ tales que $F_n(0) = F_0^{(n)}$ y $G_n(0) = G_0^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. \square

3.1. Familias únicas de autofunciones

En esta sección analizaremos las condiciones necesarias para que los coeficientes $F_0^{(n)}$ y $G_0^{(n)}$ existan y sean únicos.

Proposición 3.1.1. *Sea $P_n(x) = [F_n(x) \dot{=} G_n(x)]$ autofunción de la ecuación diferencial (3.1) analítica en el origen, definida en el intervalo $[0, \infty)$, donde $V, C, \Delta_n \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ tales que $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$, $V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y el autovalor está dado por*

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix},$$

con $\lambda_n = -v - n$, $\mu_n = -n$.

Si se cumplen las condiciones $\lambda_n - \mu_k \neq 0$ y $\mu_n - \lambda_k \neq 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, entonces, las autofunciones $P_n(x)$ son polinomios mónicos de grado n , definidos por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} F_n(x) &= n! \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ G_n(x) &= n! \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demostración. De la proposición (3.0.2) la expresión de $P_n(x) = [F_n(x) \dot{=} G_n(x)]$ está dada por

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} F_0^{(n)}, \\ G_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} G_0^{(n)}. \end{aligned}$$

Para que las autofunciones de la ecuación diferencial sean polinomios mónicos de grado n , deben cumplirse simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{F_0^{(n)}}{n!} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{G_0^{(n)}}{n!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

y

$$\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_{n+1} \frac{F_0^{(n)}}{(n+1)!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_{n+1} \frac{G_0^{(n)}}{(n+1)!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Por definición,

$$\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n = \prod_{k=1}^n (C + (n-k)I)^{-1} \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -v-k \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n = \prod_{k=1}^n (C + (n-k)I)^{-1} \begin{pmatrix} v-k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Las condiciones $\lambda_n - \mu_k \neq 0$ y $\mu_n - \lambda_k \neq 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, pueden reescribirse como $-v \neq k$ y $v \neq k$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Bajo estas condiciones, se deduce que $\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n$ y $\begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n$ son inversibles. Luego, de (3.5) es posible definir $F_0^{(n)}$ y $G_0^{(n)}$ de forma única

$$F_0^{(n)} = n! \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_0^{(n)} = n! \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación verificaremos las ecuaciones (3.6). Notemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_{n+1} \frac{F_0^{(n)}}{(n+1)!} &= (C + nI)^{-1} (V + \lambda_n I + nI) \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{F_0^{(n)}}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{[(c_{11} + n)(c_{22} + n) - c_{12}c_{21}](n+1)} \begin{pmatrix} 0 & c_{21}v \\ 0 & -(c_{11} + n)(v_{22} - v_{11}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por la definición recursiva del corchete, los términos para $n+k$ se anulan para todo $k \geq 1$.

Análogamente, se obtiene

$$\begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_{n+k} \frac{G_0}{(n+k)!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \geq 1).$$

Luego, las autofunciones $P_n(x) = [F_n(x) : G_n(x)]$ están dadas por

$$F_n(x) = n! \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_n(x) = n! \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

En el siguiente teorema se enuncian las condiciones que deben verificar los polinomios matriciales mónicos

$$P_n(x) = n! \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + n! \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

para que sean ortogonales respecto a algún peso.

Teorema 3.1.2. *Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ la familia de polinomios matriciales mónicos de grado n definidos en $x \in [0, \infty)$ por (3.7). Si la familia $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ verifica la relación de recurrencia de tres términos*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n,$$

con las condiciones iniciales $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = I$, entonces la familia reduce al caso clásico.

Demostración. Si notamos por $T_k(P_i(x))$ al k -ésimo coeficiente del polinomio $P_i(x)$, entonces

$$T_k(P_n(x)) = \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \frac{n!}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \frac{n!}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suponemos que la familia $P_n(x)$ verifica una relación de recurrencia de la forma

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n,$$

con las condiciones iniciales $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = I$.

A continuación, comparamos el coeficiente T_k en ambos miembros de la igualdad.

Si $k = n + 1$, tenemos que

$$T_k(xP_n(x)) = T_n(P_n(x)) = I, \\ T_k(P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n) = T_{n+1}(P_{n+1}(x)) = I.$$

Por lo tanto, la igualdad se verifica.

Si $k = n$, los coeficientes k -ésimos en ambos miembros de la igualdad son

$$T_k(xP_n(x)) = T_{n-1}(P_n(x)), \\ T_k(P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n) = T_n(P_{n+1}(x)) + IB_n.$$

Luego, de la igualdad

$$T_{n-1}(P_n(x)) = T_n(P_{n+1}(x)) + IB_n,$$

se tiene

$$B_n = T_{n-1}(P_n(x)) - T_n(P_{n+1}(x)) \\ = n \begin{pmatrix} -(c_{11} + n - 1) & \frac{c_{12}}{v - 1} \\ -\frac{c_{21}}{v + 1} & -(c_{22} + n - 1) \end{pmatrix} - (n + 1) \begin{pmatrix} -(c_{11} + n) & \frac{c_{12}}{v - 1} \\ -\frac{c_{21}}{v + 1} & -(c_{22} + n) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} c_{11} + 2n & -\frac{c_{12}}{v - 1} \\ \frac{c_{21}}{v + 1} & c_{22} + 2n \end{pmatrix}.$$

Si $k = n - 1$,

$$T_{n-2}(P_n(x)) = T_{n-1}(P_{n+1}(x)) + T_{n-1}(P_n(x))B_n + IA_n,$$

de donde

$$\begin{aligned} A_n &= T_{n-2}(P_n(x)) - T_{n-1}(P_{n+1}(x)) - T_{n-1}(P_n(x))B_n \\ &= n \begin{pmatrix} c_{11} + n - 1 - \frac{c_{12}c_{21}}{v^2 - 1}v & c_{12} \frac{2 - vc}{(v-2)(v-1)} \\ c_{21} \frac{2 - vc}{(v+2)(v+1)} & c_{22} + n - 1 - \frac{c_{12}c_{21}}{v^2 - 1}v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $c = c_{11} - c_{22}$.

Una vez halladas las expresiones de A_n y B_n , verificamos la relación entre los coeficientes para las demás potencias de x .

Si $k = n - 2$,

$$T_{n-3}(P_n(x)) = T_{n-2}(P_{n+1}(x)) + T_{n-2}(P_n(x))B_n + T_{n-2}(P_{n-1}(x))A_n.$$

Buscamos que $T_{n-2}(P_{n+1}(x)) + T_{n-2}(P_n(x))B_n + T_{n-2}(P_{n-1}(x))A_n - T_{n-3}(P_n(x))$ sea la matriz nula. Para esto, con el programa Wolfram Mathematica encontramos que la diagonal de esta matriz se anula si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (1) $c_{12} = 0$.
- (2) $c_{21} = 0$.
- (3) $v = 0$.
- (4) $cv = 2$.

Tomamos el caso (1). Los elementos restantes de la matriz que estamos trabajando se anulan bajo alguna de las siguientes condiciones:

- (1.1) $c_{21} = 0$.
- (1.2) $v = 0$.
- (1.3) $c = -1$.
- (1.4) $c = \frac{4}{v+1}$.

En los casos (1.1), (1.2) y (1.3) las matrices A_n y B_m conmutan, y por el teorema (2.3.5), reducen al caso clásico.

Para el caso (1.4) consideramos la igualdad

$$T_{n-3}(P_{n+1}(x)) + T_{n-3}(P_n(x))B_n + T_{n-3}(P_{n-1}(x))A_n - T_{n-4}(P_n(x)) = 0,$$

de la cual se obtienen las condiciones

- (1.4.1) $c_{21} = 0$.
- (1.4.2) $v = 0$.

Los casos (1.4.1) y (1.4.2) ya vimos que reducen al caso clásico.

El caso (2) es el conjugado de (1) por la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En el caso (3) las matrices A_n y B_m conmutan. Por lo que también reduce al caso clásico.

Finalmente, para el caso (4), los elementos $\{1, 2\}$ y $\{2, 1\}$ de la matriz

$$T_{n-2}(P_{n+1}(x)) + T_{n-2}(P_n(x))B_n + T_{n-2}(P_{n-1}(x))A_n - T_{n-3}(P_n(x))$$

se anulan si:

$$(4.1) \quad c_{12} = \frac{4 - c^2}{4c_{21}}.$$

$$(4.2) \quad c_{12} = 0, \quad c_{21} = 0.$$

En el caso (4.1) las matrices A_n y B_m conmutan, por lo que reduce al caso clásico.

Finalmente, el caso (4.2) es un caso particular de (1.1).

Por lo tanto, todas las familias de polinomios mónicos que verifican una relación de recurrencia de la forma (2.5) reducen al caso clásico. \square

3.2. Familias no únicas de autofunciones

Al comienzo de este capítulo calculamos las autofunciones de la ecuación diferencial (3.1) y encontramos bajo qué condiciones éstas son polinomios mónicos de grado n , es decir cuándo verifican

$$\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{F_0^{(n)}}{n!} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_{n+1} \frac{F_0^{(n)}}{(n+1)!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{G_0^{(n)}}{n!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_{n+1} \frac{G_0^{(n)}}{(n+1)!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y además, los corchetes $\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n$ y $\begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n$ son inversibles para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

En esta sección resolveremos la otra alternativa posible que nos lleva a encontrar una familia de polinomios matriciales mónicos que es autofunción de la ecuación diferencial (3.1), es decir, para los cuales

$$\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{F_0^{(n)}}{n!} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_{n+1} \frac{F_0^{(n)}}{(n+1)!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{G_0^{(n)}}{n!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_{n+1} \frac{G_0^{(n)}}{(n+1)!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pero con $\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n$ y $\begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n$ no inversibles para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Notemos que al pedir la condición $\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n$ y $\begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n$ no inversibles todo $n \in \mathbb{N}_0$, deducimos que $v \in \mathbb{Z}^*$, y se pierde la unicidad en la solución. Con lo cual, si existe solución, éstas deben ser infinitas.

Método

El procedimiento que proponemos consiste en hallar los vectores

$$F_0^{(n)} = \begin{pmatrix} af_n \\ bf_n \end{pmatrix} \quad y \quad G_0^{(n)} = \begin{pmatrix} ag_n \\ bg_n \end{pmatrix}$$

y las condiciones necesarias para los parámetros de las matrices C y V , de tal forma que se verifiquen las siguientes igualdades para todo $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{F_0^{(n)}}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (C + n - k)^{-1} \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -v - k \end{pmatrix} F_0^{(n)}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{G_0^{(n)}}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (C + n - k)^{-1} \begin{pmatrix} v - k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} G_0^{(n)}. \end{aligned}$$

Por simplicidad, notaremos

$$\begin{aligned} S\lambda_n &= \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{F_0^{(n)}}{n!}, \\ S\mu_n &= \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{G_0^{(n)}}{n!}, \end{aligned}$$

con lo cual, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} S\lambda_n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ S\mu_n &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $S\lambda_n$ y $S\mu_n$ son expresiones definidas por productos finitos, la dificultad algebraica es tal que proponemos como método de resolución la iteración sobre n para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Así, el sistema anterior valuado en 0 es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V + \lambda_0 I \\ C \end{pmatrix}_0 \frac{F_0^{(0)}}{0!}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V + \mu_0 I \\ C \end{pmatrix}_0 \frac{G_0^{(0)}}{0!}, \end{aligned}$$

cuya solución es trivialmente

$$\begin{aligned} F_0^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ G_0^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $n = 1$, la ecuación con $S\lambda_1$ se escribe como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V + \lambda_1 I \\ C \end{pmatrix}_1 \frac{F_0^{(1)}}{1!},$$

y tiene dos soluciones posibles:

- (1) $af_1 = -c_{11}$
 $bf_1 = \frac{-c_{21}}{v+1},$
- (2) $af_1 = -c_{11}$
 $bf_1 = 0$
 $c_{21} = 0.$

Vemos que (1) y (2) representan las posibilidades que surgen de la resolución de la ecuación con $S\lambda_1$. Si consideramos la primera opción estaremos en el caso $\boxed{1}$, y si no, en el caso $\boxed{2}$. Para $\boxed{1}$ analizamos la ecuación con $S\mu_1$,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V + \mu_1 I \\ C \end{pmatrix}_1 \frac{G_0^{(1)}}{1!}.$$

De aquí obtenemos las soluciones

- (1) $ag_1 = \frac{c_{12}}{v-1}$
 $bg_1 = -c_{22},$
- (2) $ag_1 = 0$
 $bg_1 = -c_{22}$
 $c_{12} = 0.$

Si consideramos la primera posibilidad nos encontraremos con el caso $\boxed{1.1}$; de lo contrario, será $\boxed{1.2}$. De esta manera continúa el procedimiento siguiendo esta notación. Para no perder de vista la estructura general del trabajo, en el apéndice están desarrollados el resto de los cálculos bajo el mismo criterio.

Estos resultados nos conducen a la siguiente conjetura.

Conjetura 3.2.1. Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de polinomios matriciales mónicos definidos en el intervalo $[0, \infty)$, definida por $P_n(x) = [F_n(x) \ ; \ G_n(x)]$, donde

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} F_0^{(n)},$$

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} G_0^{(n)},$$

y V, C son matrices de $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ tales que $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$, $V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{Z}^*$, $\lambda_n = -v - n$ y $\mu_n = -n$.

Entonces, se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (i) Si $v \in \mathbb{N}$, entonces C es triangular inferior.
- (ii) Si $v \in -\mathbb{N}$, entonces C es triangular superior.

A continuación, listaremos las familias que se obtienen para $v = 1, 2, -1, -2$, para ejemplificar el procedimiento. Notemos que para todas ellas

$$F_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo con $C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\Delta_n = \begin{pmatrix} -1-n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}$

Buscamos hallar los vectores $F_0^{(n)}$ y $G_0^{(n)}$ que resuelvan los sistemas

$$\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{F_0^{(n)}}{n!} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n \frac{G_0^{(n)}}{n!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n &= \prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} c_{11} + n - k & 0 \\ -c_{21} & c_{22} + n - k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -1 - k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(c_{11})_n (c_{22})_n} \prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} -k(c_{22} + n - k) & 0 \\ kc_{21} & (-1 - k)(c_{11} + n - k) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n &= \prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} c_{11} + n - k & 0 \\ -c_{21} & c_{22} + n - k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(c_{11})_n (c_{22})_n} \prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} (1 - k)(c_{22} + n - k) & 0 \\ (k - 1)c_{21} & -k(c_{11} + n - k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que los sistemas (3.8) y (3.9) son sistemas triangulares. Como $\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n$ es una matriz triangular inversible, el sistema (3.8) tiene solución única para todo $n \geq 0$ y está dada por

$$F_0^{(n)} = \begin{pmatrix} (-1)^n (c_{11})_n \\ \frac{(-1)^n c_{21}}{n+1} \sum_{k=1}^n k (c_{11} + 1 + n - k)_{k-1} (c_{22})_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, para $1 \leq k \leq n$ denotamos

$$A_k = \begin{pmatrix} (1 - k)(c_{22} + n - k) & 0 \\ (k - 1)c_{21} & -k(c_{11} + n - k) \end{pmatrix}.$$

Es claro que $\prod_{k=1}^n A_k$ es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & (-1)^n n! (c_{11})_n \end{pmatrix}.$$

Para determinar el elemento γ consideramos los productos

$$(A_1 A_2)_{21} = (-1)1c_{21}(c_{11} + n - 1),$$

$$(A_1 A_2 A_3)_{21} = (-1)^2 2! c_{21} [1(c_{11} + n - 1)_1 (c_{22} + n - 3) + 2(c_{11} + n - 2)(c_{22} + n - 3)_0],$$

$$(A_1 A_2 A_3 A_4)_{21} = (-1)^3 3! c_{21} [1(c_{11} + n - 1)_1 (c_{22} + n - 4)_2 + 2(c_{11} + n - 2)_2 (c_{22} + n - 4)_1 + 3(c_{11} + n - 3)(c_{22} + n - 4)_0].$$

Generalizando,

$$\gamma = (-1)^{n-1} (n-1)! c_{21} \sum_{k=1}^{n-1} k (c_{11} + n - k) (c_{22})_{n-k-1}.$$

Luego, despejando variables en el sistema (3.9), se obtiene

$$G_0^{(n)} = \begin{pmatrix} ag_n \\ (-1)^n (c_{22})_n + \frac{c_{21}}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{(c_{22})_{n-k-1}}{(c_{11})_{n-k}} ag_n \end{pmatrix},$$

donde $ag_n \in \mathbb{C}$.

El siguiente paso es encontrar cuáles de ellas son generadas por una relación de recurrencia de tres términos. Procediendo como lo hicimos para las familias únicas, encontramos los coeficientes A_n y B_n de la relación de recurrencia.

Como el método sugerido no permite calcularlos para n genérico, encontramos las primeras matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_{11} - \frac{c_{21} ag_1}{2} & (c_{11} - c_{22} - 2) ag_1 \\ -\frac{c_{21}(c_{11} - c_{22} - 2)}{6} & \frac{c_{22} + c_{21} ag_1}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2(c_{11} + 1) + \frac{c_{21} ag_2}{2c_{11}} & \frac{-(c_{11} - c_{22} - 2) ag_2}{c_{11}} \\ -\frac{2c_{21}(c_{11} - c_{22} - 2)}{6} & 2(c_{22} + 1) + \frac{-c_{21} ag_2}{2c_{11}} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3(c_{11} + 2) - \frac{c_{21} ag_3}{2(c_{11})_2} & \frac{(c_{11} - c_{22} - 2) ag_3}{(c_{11})_2} \\ -\frac{3c_{21}(c_{11} - c_{22} - 2)}{6} & 3(c_{22} + 2) + \frac{c_{21} ag_3}{2(c_{11})_2} \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4(c_{11} + 3) + \frac{c_{21} ag_4}{2(c_{11})_3} & \frac{-(c_{11} - c_{22} - 2) ag_4}{(c_{11})_3} \\ -\frac{4c_{21}(c_{11} - c_{22} - 2)}{6} & 4(c_{22} + 3) - \frac{c_{21} ag_4}{2(c_{11})_3} \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 5(c_{11} + 4) - \frac{c_{21} ag_5}{2(c_{11})_4} & \frac{(c_{11} - c_{22} - 2) ag_5}{(c_{11})_4} \\ -\frac{5c_{21}(c_{11} - c_{22} - 2)}{6} & 5(c_{22} + 4) + \frac{c_{21} ag_5}{2(c_{11})_4} \end{pmatrix}$$

y

$$B_0 = \begin{pmatrix} c_{11} & -ag_1 \\ \frac{c_{21}}{2} & c_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 2 & \frac{ag_1 c_{11} + ag_2}{c_{11}} \\ \frac{c_{21}}{2} & c_{22} + 2 \end{pmatrix}, \\
B_2 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 4 & \frac{ag_2(c_{11} + 1) + ag_3}{(c_{11})_2} \\ \frac{c_{21}}{2} & c_{22} + 4 \end{pmatrix}, \\
B_3 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 6 & \frac{ag_3(c_{11} + 2) + ag_4}{(c_{11})_3} \\ \frac{c_{21}}{2} & c_{22} + 6 \end{pmatrix}, \\
B_4 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 8 & -\frac{ag_4(c_{11} + 3) + ag_5}{(c_{11})_4} \\ \frac{c_{21}}{2} & c_{22} + 8 \end{pmatrix}, \\
B_5 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 10 & \frac{ag_5(c_{11} + 4) + ag_6}{(c_{11})_5} \\ \frac{c_{21}}{2} & c_{22} + 10 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ejemplo con $C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\Delta_n = \begin{pmatrix} -2 - n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}$

Procediendo como en el ejemplo anterior, se puede deducir que

$$\begin{aligned}
F_0^{(n)} &= \begin{pmatrix} (-1)^n (c_{11})_n \\ \frac{(-1)^n c_{21}}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^n k(k+1) (c_{11} + 1 + n - k)_{k-1} (c_{22})_{n-k} \end{pmatrix} \\
G_0^{(n)} &= \begin{pmatrix} ag_n \\ (-1)^n (c_{22})_n + \frac{c_{21}}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-2} k(k+1) \frac{(c_{22})_{n-k-2}}{(c_{11})_{n-k-1}} ag_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde $ag_n \in \mathbb{C}$ y $ag_1 = 0$.

Además, los primeros coeficientes de la relación de recurrencia son

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} c_{11} & -ag_2 \\ -\frac{c_{21}(c_{11} - c_{22} - 1)}{6} & c_{22} \end{pmatrix}, \\
A_2 &= \begin{pmatrix} 2(c_{11} + 1) & \frac{c_{11} ag_2 + ag_3}{c_{11}} \\ -\frac{2c_{21}(c_{11} - c_{22} - 1)}{6} & 2(c_{22} + 1) \end{pmatrix}, \\
A_3 &= \begin{pmatrix} 3(c_{11} + 2) & -\frac{(c_{11} + 1) ag_3 + ag_4}{(c_{11})_2} \\ -\frac{3c_{21}(c_{11} - c_{22} - 1)}{6} & 3(c_{22} + 2) \end{pmatrix}, \\
A_4 &= \begin{pmatrix} 4(c_{11} + 3) & \frac{(c_{11} + 2) ag_4 + ag_5}{(c_{11})_3} \\ -\frac{4c_{21}(c_{11} - c_{22} - 1)}{6} & 4(c_{22} + 3) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 5(c_{11} + 4) & -\frac{(c_{11} + 3)ag_5 + ag_6}{(c_{11})_4} \\ -\frac{5c_{21}(c_{11} - c_{22} - 1)}{6} & 5(c_{22} + 4) \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} B_0 &= \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ \frac{c_{21}}{3} & c_{22} \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 2 & 0 \\ \frac{c_{21}}{3} & c_{22} + 2 \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 4 & 0 \\ \frac{c_{21}}{3} & c_{22} + 4 \end{pmatrix}, \\ B_3 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 6 & 0 \\ \frac{c_{21}}{3} & c_{22} + 6 \end{pmatrix}, \\ B_4 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 8 & 0 \\ \frac{c_{21}}{3} & c_{22} + 8 \end{pmatrix}, \\ B_5 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 10 & 0 \\ \frac{c_{21}}{3} & c_{22} + 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo con $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\Delta_n = \begin{pmatrix} 1 - n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}$

En este caso, se sigue el procedimiento anterior pero teniendo en cuenta que el sistema con solución única será (3.9), la cual es

$$G_0^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{c_{12}}{n+1} \sum_{k=1}^n k (c_{11})_{n-k} (c_{22} + 1 + n - k)_{k-1} & \\ & (-1)^n (c_{22})_n \end{pmatrix}.$$

Mientras que el sistema (3.8) tendrá infinitas soluciones dadas por

$$F_0^{(n)} = \begin{pmatrix} (-1)^n (c_{11})_n + \frac{c_{12}}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{(c_{11})_{n-k-1}}{(c_{22})_{n-k}} b f_n & \\ & b f_n \end{pmatrix},$$

donde $b f_n \in \mathbb{C}$.

De la relación de recurrencia obtenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} c_{11} + \frac{c_{12} b f_1}{2} & c_{12} \frac{c_{11} - c_{22} + 2}{6} \\ -b f_1 (c_{11} - c_{22} + 2) & c_{22} - \frac{c_{12} b f_1}{2} \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} c_{11} + \frac{c_{12} b f_1}{2} & c_{12} \frac{c_{11} - c_{22} + 2}{6} \\ -b f_1 (c_{11} - c_{22} + 2) & c_{22} - \frac{c_{12} b f_1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3(c_{11} + 2) + \frac{c_{12}bf_3}{2(c_{22})_2} & \frac{3c_{12}}{6}(c_{11} - c_{22} + 2) \\ \frac{-(c_{11} - c_{22} + 2)bf_3}{(c_{22})_2} & 3(c_{22} + 2) + \frac{-c_{12}bf_3}{2(c_{22})_2} \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4(c_{11} + 3) + \frac{-c_{12}bf_4}{2(c_{22})_3} & \frac{4c_{12}}{6}(c_{11} - c_{22} + 2) \\ \frac{(c_{11} - c_{22} + 2)bf_4}{(c_{22})_3} & 4(c_{22} + 3) + \frac{c_{12}bf_4}{2(c_{22})_3} \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 5(c_{11} + 4) + \frac{c_{12}bf_5}{2(c_{22})_4} & \frac{5c_{12}}{6}(c_{11} - c_{22} + 2) \\ \frac{-(c_{11} - c_{22} + 2)bf_5}{(c_{22})_4} & 5(c_{22} + 4) + \frac{-c_{12}bf_5}{2(c_{22})_4} \end{pmatrix}$$

y

$$B_0 = \begin{pmatrix} c_{11} & \frac{c_{12}}{2} \\ -bf_1 & c_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} c_{11} + 2 & \frac{c_{12}}{2} \\ \frac{(c_{22})bf_1 + bf_2}{c_{22}} & c_{22} + 2 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} c_{11} + 4 & \frac{c_{12}}{2} \\ -\frac{(c_{22} + 1)bf_2 + bf_3}{(c_{22})_2} & c_{22} + 4 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} c_{11} + 6 & \frac{c_{12}}{2} \\ \frac{(c_{22} + 2)bf_3 + bf_4}{(c_{22})_3} & c_{22} + 6 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} c_{11} + 8 & \frac{c_{12}}{2} \\ -\frac{(c_{22} + 3)bf_4 + bf_5}{(c_{22})_4} & c_{22} + 8 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} c_{11} + 10 & \frac{c_{12}}{2} \\ \frac{(c_{22} + 4)bf_5 + bf_6}{(c_{22})_5} & c_{22} + 10 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo con $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\Delta_n = \begin{pmatrix} 2 - n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}$

Siguiendo el razonamiento del ejemplo anterior, tenemos que

$$F_0^{(n)} = \begin{pmatrix} (-1)^n(c_{11})_n + \frac{c_{12}}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-2} k(k+1) \frac{(c_{11})_{n-k-2} bf_n}{(c_{22})_{n-k-1}} \\ bf_n \end{pmatrix},$$

donde $bf_n \in \mathbb{C}$ y $bf_1 = 0$, y

$$G_0^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n c_{12}}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^n k(k+1)(c_{11})_{n-k}(c_{22} + 1 + n - k)_{k-1} \\ (-1)^n (c_{22})_n \end{pmatrix}.$$

De igual manera, busquemos que estas familias satisfagan una relación de recurrencia de tres términos y hallamos que los primeros coeficientes A_n y B_n son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} c_{11} + c_{12} \frac{c_{11} - c_{22} + 1}{6} & \\ -bf_2 & c_{22} \end{pmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{pmatrix} 2(c_{11} + 1) & c_{12} \frac{c_{11} - c_{22} + 1}{3} \\ bf_2 + \frac{bf_3}{c_{22}} & 2(c_{22} + 1) \end{pmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{pmatrix} 3(c_{11} + 2) & c_{12} \frac{c_{11} - c_{22} + 1}{2} \\ \frac{bf_3(c_{22} + 1) + bf_4}{(c_{22})_2} & 3(c_{22} + 2) \end{pmatrix}, \\
 A_4 &= \begin{pmatrix} 4(c_{11} + 3) & 2c_{12} \frac{c_{11} - c_{22} + 1}{3} \\ \frac{bf_4(c_{22} + 2) + bf_5}{(c_{22})_3} & 4(c_{22} + 3) \end{pmatrix}, \\
 A_5 &= \begin{pmatrix} 5(c_{11} + 4) & 5c_{12} \frac{c_{11} - c_{22} + 1}{6} \\ \frac{bf_5(c_{22} + 3) + bf_6}{(c_{22})_4} & 5(c_{22} + 4) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \begin{pmatrix} c_{11} & \frac{c_{12}}{3} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 2 & \frac{c_{12}}{3} \\ 0 & c_{22} + 2 \end{pmatrix}, \\
 B_2 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 4 & \frac{c_{12}}{3} \\ 0 & c_{22} + 4 \end{pmatrix}, \\
 B_3 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 6 & \frac{c_{12}}{3} \\ 0 & c_{22} + 6 \end{pmatrix}, \\
 B_4 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 8 & \frac{c_{12}}{3} \\ 0 & c_{22} + 8 \end{pmatrix}, \\
 B_5 &= \begin{pmatrix} c_{11} + 10 & \frac{c_{12}}{3} \\ 0 & c_{22} + 10 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

De los ejemplos anteriores puede visualizarse que no es sencillo, en caso de que existiera, hallar una única expresión de los coeficientes A_n y B_n de la relación de recurrencia de tres términos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n,$$

donde $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = I$, que dependa de $v \in \mathbb{Z}^*$. Por esto, no podemos utilizar el teorema de Favard para hallar las condiciones necesarias sobre los parámetros de la ecuación diferencial que aseguran la ortogonalidad de las familias de polinomios matriciales mónicos.

El nuevo enfoque que proponemos es utilizar el teorema (2.3.6) que proporciona condiciones necesarias y suficientes para hallar un peso simétrico asociado a la ecuación diferencial

$$xP_n''(x) + (C - xI)P_n'(x) - VP_n(x) = P_n(x)\Delta_n \quad x \in [0, \infty), \quad (3.10)$$

donde V , C y Δ_n son matrices en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, tales que $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$. Basándonos en los resultados obtenidos por medio del método de iteración, proponemos considerar una matriz triangular inferior

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

ya que si fuera una matriz triangular superior bastaría hacer la conjugación de la anterior. Además, consideraremos que el elemento c_{21} no se anula; de lo contrario, las autofunciones de la ecuación diferencial (3.10) siempre reducen al caso clásico.

Observemos que la ecuación diferencial (3.10) desde el punto de vista clásico tiene como autofunción a la familia de polinomios de Laguerre $\{L_n^\alpha(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, donde $x \in [0, \infty)$, $\alpha > -1$ y el peso asociado es $w(x) = e^{-x}x^\alpha$. Por esta razón, proponemos el peso matricial $W(x) = e^{-x}x^\alpha \widetilde{W}(x)$, donde

$$\widetilde{W}(x) = \begin{pmatrix} w_{11}(x) & w_{12}(x) \\ w_{12}(x) & w_{22}(x) \end{pmatrix}$$

es una función matricial.

Teorema 3.2.2. *Sea W una función de peso definida positiva e irreducible, tal que $W(x)$ tiene la forma $W(x) = e^{-x}x^\alpha \widetilde{W}(x)$, donde $x \in [0, \infty)$, $\alpha > -1$ y*

$$\widetilde{W}(x) = \begin{pmatrix} w_{11}(x) & w_{12}(x) \\ w_{12}(x) & w_{22}(x) \end{pmatrix}$$

es una función matricial, y sea $D = xI \frac{d^2}{dx^2} + (C - xI) \frac{d}{dx} - V$ el operador diferencial simétrico con respecto a W , donde $V, C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ tales que $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$,

$$V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Si $c_{11} > 2$, $c_{22} = c_{11} - 2$, $c_{21} \in \mathbb{R}^*$ y $v = 1$, entonces el peso es de la forma

$$W(x) = e^{-x}x^{c_{11}-1} \begin{pmatrix} \kappa - \frac{c_{21}^2}{2(c_{11}-2)x} + \frac{c_{21}^2}{4x^2} & \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)x} - \frac{c_{21}}{2x^2} \\ \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)x} - \frac{c_{21}}{2x^2} & x^{-2} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

donde $\kappa > \left(\frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)} \right)^2$.

Demostración. Sean V , C y W del enunciado. Utilizamos el teorema (2.3.6) considerando

$$\begin{aligned} A_2(x) &= xI, \\ A_1(x) &= C - xI, \\ A_0(x) &= -V, \end{aligned}$$

para hallar las condiciones necesarias sobre V , C y $\widetilde{W}(x)$ de modo que el teorema se verifique.

La primera ecuación del teorema, $W(x)A_2(x) = A_2^*(x)W(x)$ se cumple trivialmente.

La segunda ecuación del teorema, $2(W(x)A_2(x))' = W(x)A_1(x) + A_1^*(x)W(x)$, resulta ser

$$2x\widetilde{W}'(x) + [2(\alpha+1)I - C^*]\widetilde{W}(x) - \widetilde{W}(x)C = 0.$$

De esta expresión obtenemos cuatro ecuaciones diferenciales lineales de primer orden,

$$xw'_{11} + [\alpha + 1 - c_{11}]w_{11} - c_{21}w_{12} = 0, \quad (3.12)$$

$$2xw'_{12} + 2(\alpha + 2)w_{12} - c_{21}w_{22} = 0, \quad (3.13)$$

$$2xw'_{12} + 2(\alpha + 2)w_{12} - c_{21}w_{22} = 0, \quad (3.14)$$

$$xw'_{22} + (\alpha + 3 - c_{11})w_{22} = 0. \quad (3.15)$$

La tercera ecuación del teorema, $(W(x)A_2(x))'' - (W(x)A_1(x))' + W(x)A_0(x) = A_0^*(x)W(x)$, se expresa como

$$x^2\widetilde{W}''(x) + 2x(\alpha + 1 - x)\widetilde{W}'(x) - x\widetilde{W}'(x)(C - xI) + [(\alpha - x)(\alpha + 1 - x)I + xV^*]\widetilde{W}(x) - (\alpha - x)\widetilde{W}(x)(C - xI) - x\widetilde{W}(x)V = 0,$$

de donde obtenemos cuatro ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden,

$$x^2w''_{11} + x(2\alpha + 2 - c_{11} - x)w'_{11} + (\alpha - x)(\alpha + 1 - c_{11})w_{11} - xc_{21}w'_{12} - (\alpha - x)c_{21}w_{12} = 0, \quad (3.16)$$

$$x^2w''_{12} + x[2(\alpha + 2) - c_{11} - x]w'_{12} + [(\alpha - x)(\alpha + 3 - c_{11}) + x]w_{12} = 0, \quad (3.17)$$

$$x^2w''_{12} + x(2\alpha + 2 - c_{11} - x)w'_{12} + [(\alpha - x)(\alpha + 1 - c_{11}) - x]w_{12} - xc_{21}w'_{22} - (\alpha - x)c_{21}w_{22} = 0, \quad (3.18)$$

$$x^2w''_{22} + x[2(\alpha + 2) - c_{11} - x]w'_{22} + (\alpha - x)(\alpha + 3 - c_{11})w_{22} = 0. \quad (3.19)$$

Resolvemos la ecuación diferencial (3.15) y obtenemos

$$w_{22}(x) = x^{c_{11} - \alpha - 3},$$

que verifica la ecuación diferencial (3.19).

De la ecuación diferencial (3.14) se obtiene

$$w_{12}(x) = \gamma x^{c_{11} - \alpha - 2} - \frac{c_{21}}{2} x^{c_{11} - \alpha - 3},$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$ para que el peso sea hermítico. Reemplazamos esta función en (3.18) y obtenemos

$$x^{c_{11} - \alpha - 2} \frac{c_{21} - 2\gamma(c_{11} - 2)}{2} = 0.$$

De esto se deduce que $\gamma = \frac{c_{21}}{2(c_{11} - 2)}$. Por lo tanto,

$$w_{12}(x) = \frac{c_{21}}{2(c_{11} - 2)} x^{c_{11} - \alpha - 2} - \frac{c_{21}}{2} x^{c_{11} - \alpha - 3}$$

verifica la ecuación diferencial (3.17).

Por último, de la ecuación diferencial (3.12) obtenemos

$$w_{11}(x) = \kappa x^{c_{11} - \alpha - 1} - \frac{c_{21}^2}{2(c_{11} - 2)} x^{c_{11} - \alpha - 2} + \frac{c_{21}^2}{4} x^{c_{11} - \alpha - 3},$$

donde $\kappa \in \mathbb{R}$ para que el peso sea hermítico. Las funciones $w_{11}(x)$ y $w_{12}(x)$ obtenidas verifican la ecuación diferencial (3.16). Por lo tanto, el peso está dado por

$$W(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \kappa x^{c_{11} - 1} - \frac{c_{21}^2}{2(c_{11} - 2)} x^{c_{11} - 2} + \frac{c_{21}^2}{4} x^{c_{11} - 3} & \frac{c_{21}}{2(c_{11} - 2)} x^{c_{11} - 2} - \frac{c_{21}}{2} x^{c_{11} - 3} \\ \frac{c_{21}}{2(c_{11} - 2)} x^{c_{11} - 2} - \frac{c_{21}}{2} x^{c_{11} - 3} & x^{c_{11} - 3} \end{pmatrix}.$$

Por definición, W debe ser integrable en el intervalo $[0, \infty)$ y definido positivo. Estas condiciones se verifican para $c_{11} > 2$ y $\kappa > \left(\frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)}\right)^2$.

Ahora analicemos la segunda condición del teorema. El límite de

$$W(x)A_2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \kappa x^{c_{11}} - \frac{c_{21}^2}{2(c_{11}-2)}x^{c_{11}-1} + \frac{c_{21}^2}{4}x^{c_{11}-2} & \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)}x^{c_{11}-1} - \frac{c_{21}}{2}x^{c_{11}-2} \\ \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)}x^{c_{11}-1} - \frac{c_{21}}{2}x^{c_{11}-2} & x^{c_{11}-2} \end{pmatrix}$$

se anula cuando x tiende 0 y cuando tiende a infinito. Por otro lado,

$$(W(x)A_2(x))' - W(x)A_1(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)}x^{c_{11}-2} \\ -\frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)}x^{c_{11}-2} & 0 \end{pmatrix},$$

también se anula en el límite cuando x tiende a 0 y a infinito. Por lo tanto, W es un peso simétrico respecto al operador diferencial del enunciado.

Para verificar que el peso es irreducible, consideramos una matriz no singular $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ dada por

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Calculamos el producto $MW(x)M^*$ y analizamos bajo qué condiciones los elementos $\{1, 2\}$ y $\{2, 1\}$ se anulan:

$$(MW(x)M^*)_{12} = \frac{e^{-x}x^{c_{11}-3}}{4(c_{11}-2)} [(c_{11}-2)(ac_{21}-2b)(\bar{c}c_{21}-2\bar{d}) + 2c_{21}x(\bar{c}(b-ac_{21})+a\bar{d}) + 4a\kappa\bar{c}x^2(c_{11}-2)].$$

Como $c_{21} \neq 0$, este producto se anula sólo si $c = d = 0$, lo cual contradice la hipótesis de que la matriz M es invertible. Por lo tanto, el peso no reduce. \square

Observación. Notemos que la expresión del peso (3.11) termina dependiendo de una constante arbitraria κ . Esto se debe a que las familias asociadas a dicho peso son infinitas.

De acuerdo al primer ejemplo de esta sección, las autofunciones del operador diferencial (3.10) con coeficientes

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{11}-2 \end{pmatrix}, \quad y \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y autovalor diagonal

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} -1-n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix},$$

son familias de polinomios mónicos matriciales dados por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V - (n+1)I \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} (-1)^n (c_{11})_n & 0 \\ (-1)^n (c_{11})_{n-1} & \frac{c_{21}n}{2} \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V - nI \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & ag_n \\ 0 & (-1)^n (c_{11}-2)_n + \frac{c_{21}(n-1)}{2(c_{11}+n-2)} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

con parámetros $c_{11} > 2$, $c_{21} \in \mathbb{R}^*$, y $ag_n \in \mathbb{R}$.

En este punto surge la pregunta natural: ¿es la familia de polinomios recién definida ortogonal respecto al peso hallado en el teorema anterior? Para responderla, calculamos el producto interno entre P_0 y P_1 respecto al peso (3.11),

$$\int_0^\infty P_0^*(x)W(x)P_1(x)dx = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\Gamma(c_{11}-2)}{4} [2c_{21} - ag_1 (c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11}-2)_2)] & 0 \end{pmatrix}.$$

De esto se puede ver que la ortogonalidad depende de la elección de ag_n . Por lo tanto, en los siguientes resultados se demuestran las condiciones para que estas familias sean ortogonales respecto al peso matricial (3.11).

Proposición 3.2.3. *La familia de polinomios matriciales mónicos definidos en (3.20) verifica una relación de recurrencia de tres términos de la forma*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n,$$

con condiciones iniciales $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = I$, y los coeficientes de la relación son

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{2n(c_{11})_n + (-1)^n c_{21} ag_n}{2(c_{11})_{n-1}} & 0 \\ 0 & \frac{2n(c_{11} + n - 3)(c_{11})_{n-1} + (-1)^{n+1} c_{21} ag_n}{2(c_{11})_{n-1}} \end{pmatrix},$$

$$B_n = \begin{pmatrix} c_{11} + 2n & (-1)^{n+1} \frac{(c_{11} + n - 1)ag_n + ag_{n+1}}{(c_{11})_n} \\ \frac{c_{21}}{2} & c_{11} + 2(n-1) \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sean Δ la matriz bloque diagonal de autovalores y L el operador en diferencia dados por

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_0 & 0 & & \\ 0 & \Delta_1 & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & 0 & \\ I & B_1 & A_2 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde $\Delta_n = \begin{pmatrix} -1-n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}$, y A_n y B_n son los coeficientes del enunciado.

Para estos operadores calculamos

$$(\text{ad } L)^3(\Delta) = L^3\Delta - 3L^2\Delta L + 3L\Delta L^2 - \Delta L^3,$$

lo cual es una matriz heptadiagonal cuyos elementos están dados por las siguientes expresiones:

si $i = j$,

$$\begin{aligned} ((\text{ad } L)^3(\Delta))_{ij} &= (B_{i-1}(B_{i-1}^2 + A_i + A_{i-1}) + A_i(B_{i-1} + B_i) + B_{i-2}A_{i-1} + A_{i-1}B_{i-1}) \Delta_{i-1} - \\ &\quad - \Delta_{i-1} (B_{i-1}(B_{i-1}^2 + A_i + A_{i-1}) + A_i(B_{i-1} + B_i) + B_{i-2}A_{i-1} + A_{i-1}B_{i-1}) - \\ &\quad - 3((B_{i-1}^2 + A_{i-1} + A_i)\Delta_{i-1}B_{i-1} + (B_{i-2} + B_{i-1})\Delta_{i-2}A_{i-1} + (B_{i-1}A_i + A_iB_i)\Delta_i) + \\ &\quad + 3(\Delta_{i-2}(B_{i-2}A_{i-1} + A_{i-1}B_{i-1}) + B_{i-1}\Delta_{i-1}(B_{i-1}^2 + A_{i-1} + A_i) + A_i\Delta_i(B_{i-1} + B_i)); \end{aligned}$$

si $i = j - 1$,

$$\begin{aligned} ((\text{ad } L)^3(\Delta))_{ij} &= (B_{i-1}(B_{i-1}A_i + A_iB_i) + A_i(B_i^2 + A_{i-1} + A_i + A_{i+1})) \Delta_i - \\ &\quad - \Delta_{i-1}(B_{i-1}(B_{i-1}A_i + A_iB_i) + A_i(B_i^2 + A_{i-1} + A_i + A_{i+1})) - \\ &\quad - 3(B_{i-1}^2 + A_{i-1} + A_i)\Delta_{i-1}A_i + (B_{i-1}A_i + A_iB_i)\Delta_iB_i + (A_iA_{i+1})\Delta_{i+1} + \\ &\quad + 3(\Delta_{i-2}(A_{i-1}A_i) + B_{i-1}\Delta_{i-1}(B_{i-1}A_i + A_iB_i) + A_i\Delta_i(B_i^2 + A_i + A_{i+1})); \end{aligned}$$

si $i = j - 2$,

$$\begin{aligned} ((\text{ad } L)^3(\Delta))_{ij} &= (B_{i-1}A_iA_{i+1} + A_i(A_{i+1}B_{i+1} + B_iA_{i+1}))\Delta_{i+1} - \\ &\quad - \Delta_{i-1}(B_{i-1}A_iA_{i+1} + A_i(A_{i+1}B_{i+1} + B_iA_{i+1})) - \\ &\quad - 3((B_{i-1}A_i + A_iB_i)\Delta_iA_{i+1} + (A_iA_{i+1})\Delta_{i+1}B_{i+1}) + \\ &\quad \quad \quad 3(B_{i-1}\Delta_{i-1}(A_iA_{i+1}) + A_i\Delta_i(B_iA_{i+1} + A_{i+1}B_{i+1})); \end{aligned}$$

si $i = j - 3$,

$$\begin{aligned} ((\text{ad } L)^3(\Delta))_{ij} &= (A_iA_{i+1}A_{i+2})\Delta_{i+2} - \Delta_{i-1}(A_iA_{i+1}A_{i+2}) - 3((A_iA_{i+1})\Delta_{i+1}A_{i+2}) + \\ &\quad \quad \quad + 3(A_i\Delta_i(A_{i+1}A_{i+2})); \end{aligned}$$

si $i = j + 1$,

$$\begin{aligned} ((\text{ad } L)^3(\Delta))_{ij} &= (B_{i-2}^2 + B_{i-1}(B_{i-1} + B_{i-2}) + A_{i-2} + A_{i-1} + A_i)\Delta_{i-2} - \\ &\quad - \Delta_{i-1}(B_{i-2}^2 + B_{i-1}(B_{i-1} + B_{i-2}) + A_{i-2} + A_{i-1} + A_i) - \\ &\quad - 3(\Delta_{i-3}A_{i-2} + (B_{i-2} + B_{i-1})\Delta_{i-2}B_{i-2} + (B_{i-1}^2 + A_{i-1} + A_i)\Delta_{i-1}) + \\ &\quad \quad \quad + 3(\Delta_{i-2}(B_{i-2}^2 + A_{i-2} + A_{i-1}) + B_{i-1}\Delta_{i-1}(B_{i-2} + B_{i-1}) + A_i\Delta_i); \end{aligned}$$

si $i = j + 2$,

$$\begin{aligned} ((\text{ad } L)^3(\Delta))_{ij} &= (B_{i-3} + B_{i-2} + B_{i-1})\Delta_{i-3} - \Delta_{i-1}(B_{i-3} + B_{i-2} + B_{i-1}) - \\ &\quad - 3(\Delta_{i-3}B_{i-3} + (B_{i-2} + B_{i-1})\Delta_{i-2}) + 3(\Delta_{i-2}(B_{i-3} + B_{i-2}) + B_{i-1}\Delta_{i-1}); \end{aligned}$$

si $i = j + 3$,

$$((\text{ad } L)^3(\Delta))_{ij} = \Delta_{i-4} - \Delta_{i-1} - 3\Delta_{i-3} + 3\Delta_{i-2}.$$

Mediante un cálculo algebraico se puede comprobar que estos elementos se anulan. Luego, por el teorema (2.4.1), la familia verifica la relación de recurrencia del enunciado. \square

Teorema 3.2.4. *Si*

$$ag_n = \frac{(-1)^{n-1}2nc_{21}(c_{11})_{n-1}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 2)(c_{11} - 2 + n)},$$

entonces la familia de polinomios matriciales mónicos dados por (3.20) es ortogonal respecto al peso matricial

$$W(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \kappa x^{c_{11}-1} - \frac{c_{21}^2}{2(c_{11}-2)}x^{c_{11}-2} + \frac{c_{21}^2}{4}x^{c_{11}-3} & \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)}x^{c_{11}-2} - \frac{c_{21}}{2}x^{c_{11}-3} \\ \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)}x^{c_{11}-2} - \frac{c_{21}}{2}x^{c_{11}-3} & x^{c_{11}-3} \end{pmatrix},$$

donde $c_{11} > 2$, $c_{21} \in \mathbb{R}^*$ y $\kappa > \left(\frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)}\right)^2$.

Demostración. Por la proposición anterior (3.2.3), la familia $\{P_n\}$ definida por (3.20) verifica una relación de recurrencia de tres términos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n,$$

cuyos coeficientes son

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{2n(c_{11})_n + (-1)^n c_{21} a g_n}{2(c_{11})_{n-1}} & 0 \\ 0 & \frac{2n(c_{11} + n - 3)(c_{11})_{n-1} + (-1)^{n+1} c_{21} a g_n}{2(c_{11})_{n-1}} \end{pmatrix},$$

$$B_n = \begin{pmatrix} c_{11} + 2n & (-1)^{n+1} \frac{(c_{11} + n - 1) a g_n + a g_{n+1}}{(c_{11})_n} \\ \frac{c_{21}}{2} & c_{11} + 2(n - 1) \end{pmatrix}.$$

Por teorema de Favard, la familia es ortogonal si

- (i) $A_n = S_{n-1}^{-1} S_n$,
- (ii) $S_n B_n = (S_n B_n)^T$.

De (i) es fácil comprobar que $S_n = S_0 A_1 A_2 \dots A_n$, donde

$$S_0 = \|P_0(x)\|^2 = \Gamma(c_{11} - 2) \begin{pmatrix} -\frac{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 2)_2}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Combinando (i) y (ii), y usando el hecho de que S_0 y A_n son matrices diagonales, obtenemos la siguiente relación de recurrencia para $a g_n$

$$a g_n = \frac{2c_{21}(-1)^{n-1}(c_{11})_{n-1}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 1)(c_{11} - 2)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k(c_{11} + k - 3)(c_{11})_{k-1} + (-1)^{k-1} c_{21} a g_k}{2k(c_{11})_k + (-1)^k c_{21} a g_k} - (c_{11} + n - 2) a g_{n-1}, \quad (3.21)$$

con la condición inicial $a g_0 = 0$.

Proponemos como solución

$$a g_n = \frac{2n c_{21} (-1)^{n-1} (c_{11})_{n-1}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 1)(c_{11} + n - 2)}. \quad (3.22)$$

Para verificar que (3.22) es la única solución de la relación (3.21) procederemos por inducción.

Si $n = 1$, es sencillo verificar que tanto la relación (3.21) como (3.22) se reducen a

$$a g_1 = \frac{2c_{21}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 2)(c_{11} - 1)}.$$

Suponemos que (3.22) es solución de la relación (3.21) para todo $k \leq n$. Por definición de (3.21),

$$a g_{n+1} = \frac{2c_{21}(-1)^n (c_{11})_n}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 1)(c_{11} - 2)} \prod_{k=1}^n \frac{2k(c_{11} + k - 3)(c_{11})_{k-1} + (-1)^{k-1} c_{21} a g_k}{2k(c_{11})_k + (-1)^k c_{21} a g_k} - (c_{11} + n - 1) a g_n$$

se puede reescribir como

$$a g_{n+1} = -(c_{11} + n - 1)(a g_n + (c_{11} + n - 2) a g_{n-1}) \frac{2n(c_{11} + n - 3)(c_{11})_{n-1} + (-1)^{n-1} c_{21} a g_n}{2n(c_{11})_n + (-1)^n c_{21} a g_n} - (c_{11} + n - 1) a g_n.$$

Utilizando la hipótesis inductiva,

$$ag_{n+1} = (-1)^n (c_{11})_n 2c_{21} \left(\frac{n}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 2)(c_{11} + n - 2)} - \frac{n-1}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 2)(c_{11} + n - 3)} \right) \times \\ \times \frac{(c_{11} + n - 3)(c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 2)(c_{11} + n - 2)) + c_{21}^2}{(c_{11} + n - 1)(c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 2)(c_{11} + n - 2)) - c_{21}^2} + \frac{n(-1)^n (c_{11})_n 2c_{21}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 2)(c_{11} + n - 2)}.$$

Mediante cálculos algebraicos se puede corroborar que

$$ag_{n+1} = \frac{(-1)^n (c_{11})_n 2(n+1)c_{21}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 2)(c_{11} + n - 2)},$$

lo cual es la solución propuesta (3.22) para $n+1$.

Por lo tanto, la familia obtenida

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{V - (n+1)I}{C} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} (-1)^n (c_{11})_n & 0 \\ (-1)^n \frac{c_{21}^n}{2} (c_{11})_{n-1} & 0 \end{pmatrix} + \\ + \sum_{k=0}^n \binom{V - nI}{C} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & \frac{(-1)^{n-1} 2nc_{21} (c_{11})_{n-1}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 2)(c_{11} - 2 + n)} \\ 0 & (-1)^n (c_{11} - 2)_n + \frac{c_{21}(n-1)}{2(c_{11} + n - 2)} \end{pmatrix},$$

es ortogonal respecto al peso

$$W(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \kappa x^{c_{11}-1} - \frac{c_{21}^2}{2(c_{11}-2)} x^{c_{11}-2} + \frac{c_{21}^2}{4} x^{c_{11}-3} & \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)} x^{c_{11}-2} - \frac{c_{21}}{2} x^{c_{11}-3} \\ \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)} x^{c_{11}-2} - \frac{c_{21}}{2} x^{c_{11}-3} & x^{c_{11}-3} \end{pmatrix}.$$

□

A continuación, listaremos los primeros términos de dichas familias

$$P_0(x) = I,$$

$$P_1(x) = xI + \begin{pmatrix} -c_{11} & \frac{2c_{21}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} - 1)(c_{11} - 2)} \\ \frac{-c_{21}}{2} & 2 - c_{11} \end{pmatrix},$$

$$P_2(x) = x^2 I + x \begin{pmatrix} -2(c_{11} + 1) & \frac{4c_{21}}{c_{21}^2 - 4\kappa c_{11}(c_{11} - 2)} \\ -c_{21} & -2(c_{11} - 1) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} c_{11}(c_{11} + 1) & -\frac{4c_{21}c_{11}}{c_{21}^2 - 4\kappa c_{11}(c_{11} - 2)} \\ c_{21}c_{11} & c_{11}(c_{11} - 3) + 2 - \frac{2c_{21}^2}{c_{21}^2 - 4\kappa c_{11}(c_{11} - 2)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
P_3(x) = & x^3 I + x^2 \begin{pmatrix} -3(c_{11} + 2) & \frac{6c_{21}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} + 1)(c_{11} - 2)} \\ \frac{-3c_{21}}{2} & -3c_{11} \end{pmatrix} + \\
& + x \begin{pmatrix} 3(c_{11} + 1)(c_{11} + 2) & \frac{-12c_{21}c_{11}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} + 1)(c_{11} - 2)} \\ 3c_{21}(c_{11} + 1) & 3(c_{11} - 1) - \frac{6c_{21}^2}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} + 1)(c_{11} - 2)} \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} -c_{11}(c_{11} + 1)(c_{11} + 2) & \frac{6c_{21}c_{11}(c_{11} + 1)}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} + 1)(c_{11} - 2)} \\ \frac{-3c_{21}c_{11}(c_{11} + 1)}{2} & -c_{11}(c_{11} - 1)(c_{11} - 2) + \frac{6c_{21}^2c_{11}}{c_{21}^2 - 4\kappa(c_{11} + 1)(c_{11} - 2)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusiones

En esta sección presentamos los resultados más destacados del capítulo 3.

- Las autofunciones $P_n(x) = [F_n(x):G_n(x)]$ de la ecuación diferencial

$$xP_n''(x) + (C - xI)P_n'(x) - VP_n(x) = P_n(x)\Delta_n$$

son polinomios mónicos de grado n de la forma

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} F_0^{(n)}, \\
G_n(x) &= \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} G_0^{(n)},
\end{aligned}$$

donde $x \in [0, \infty)$, $V, C, \Delta_n \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ tales que $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$,

$$V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y el autovalor Δ_n está dado por la matriz diagonal

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix},$$

con $\lambda_n = -n - v$ y $\mu_n = -n$. Además, las expresiones de $F_0^{(n)}$ y $G_0^{(n)}$ dependen de si v es, o no, un entero no nulo.

- Si los corchetes $\begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_k$ y $\begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_k$ son inversibles para todo k , es decir, si $v \notin \mathbb{Z}^*$; entonces,

$$\begin{aligned}
F_0^{(n)} &= n! \begin{pmatrix} V + \lambda_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
G_0^{(n)} &= n! \begin{pmatrix} V + \mu_n I \\ C \end{pmatrix}_n^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Además, si la familia de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$ definida en $[0, \infty)$ satisface una relación de recurrencia de tres términos, entonces reduce al caso clásico.

- Si $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{11} - 2 \end{pmatrix}$ entonces, existen infinitas familias de polinomios matriciales mónicos irreducibles que son de la forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V - (n+1)I \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} (-1)^n (c_{11})_n & 0 \\ (-1)^n \frac{c_{21} n}{2} (c_{11})_{n-1} & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} V - nI \\ C \end{pmatrix}_k \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & \frac{(-1)^{n-1} 2n c_{21} (c_{11})_{n-1}}{c_{21}^2 - 4\kappa (c_{11} - 2)(c_{11} - 2 + n)} \\ 0 & (-1)^n (c_{11} - 2)_n + \frac{c_{21}(n-1)}{2(c_{11} + n - 2)} \end{pmatrix},$$

definidos en $[0, \infty)$ y que cumplen las siguientes propiedades:

- son autofunciones del operador diferencial

$$xP_n''(x) + (C - xI)P_n'(x) - VP_n(x) = P_n(x)\Delta_n,$$

donde $c_{11} > 2$ y el autovalor Δ_n está dado por la matriz diagonal

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} -1 - n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix};$$

- son ortogonales respecto al peso matricial

$$W(x) = e^{-x} x^{c_{11}-1} \begin{pmatrix} \kappa - \frac{c_{21}^2}{2(c_{11}-2)x} + \frac{c_{21}^2}{4x^2} & \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)x} - \frac{c_{21}}{2x^2} \\ \frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)x} - \frac{c_{21}}{2x^2} & x^{-2} \end{pmatrix},$$

donde $\kappa > \left(\frac{c_{21}}{2(c_{11}-2)}\right)^2$;

- verifican una relación de recurrencia de tres términos de la forma

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)B_n + P_{n-1}(x)A_n,$$

donde $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = I$ y los coeficientes de la relación son

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{2n(c_{11})_n + (-1)^n c_{21} a g_n}{2(c_{11})_{n-1}} & 0 \\ 0 & \frac{2n(c_{11} + n - 3)(c_{11})_{n-1} + (-1)^{n+1} c_{21} a g_n}{2(c_{11})_{n-1}} \end{pmatrix},$$

$$B_n = \begin{pmatrix} c_{11} + 2n & (-1)^{n+1} \frac{(c_{11} + n - 1) a g_n + a g_{n+1}}{(c_{11})_n} \\ \frac{c_{21}}{2} & c_{11} + 2(n-1) \end{pmatrix}.$$

Apéndice A

Familias no únicas

Recapitulando, tenemos

$$S\lambda_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$S\mu_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Para $n = 0$, este sistema tiene por solución a:

$$F_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si $n = 1$, para la ecuación (A.1) obtenemos dos soluciones posibles:

$$\boxed{1} \quad \begin{aligned} af_1 &= -c_{11} \\ bf_1 &= \frac{-c_{21}}{v+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \quad \begin{aligned} af_1 &= -c_{11} \\ bf_1 &= 0 \\ c_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Caso 1

De la ecuación (A.2) obtenemos

$$(1) \quad \begin{aligned} ag_1 &= \frac{c_{12}}{v-1} \\ bg_1 &= -c_{22} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} ag_1 &= 0 \\ bg_1 &= -c_{22} \\ c_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{1.1}$

Para $n = 2$ las soluciones de (A.1) son:

- (1) $af_2 = (c_{11})_2 + \frac{c_{12}c_{21}}{v+1}$
 $bf_2 = 2c_{21} \frac{c_{22} + (c_{11} + 1)(v+1)}{(v+1)(v+2)}$
- (2) $af_2 = (c_{11})_2$
 $c_{21} = 0$
 $v = -2$
- (3) $af_2 = (c_{11})_2$
 $bf_2 = 0$
 $c_{21} = 0$
- (4) $af_2 = (c_{11})_2 + \frac{c_{12}}{2c_{22}}bf_2$
 $c_{21} = 0$
 $v = -1$

1.1.1

y las de (A.2) son:

- (1) $ag_2 = 2c_{12} \frac{c_{11} - (c_{22} + 1)(v-1)}{(v-1)(v-2)}$
 $bg_2 = (c_{22})_2 - \frac{c_{12}c_{21}}{v-1}$
- (2) $bg_2 = (c_{22})_2$
 $c_{12} = 0$
 $v = 2$
- (3) $ag_2 = 0$
 $bg_2 = (c_{22})_2$
 $c_{12} = 0$
- (4) $bg_2 = (c_{22})_2 + \frac{c_{21}}{2c_{11}ag_2}$
 $c_{21} = 0$
 $v = 1$

De la solución **1.1.1.1** obtenemos el caso inversible, y de los sucesivos pasos desde $n = 3$ se generan casos que quedan relegados para un trabajo futuro debido a que es insuficiente la capacidad de cálculo del programa. Algunos de estos son:

- (1) $af_3 = -(c_{11})_3 + c_{12}c_{21} \frac{3(c_{11} + 1) + \sqrt{1 + 2c_{12}c_{21}}}{2}$
 $v = -3$
 $c_{22} = c_{11} + \frac{3 - \sqrt{1 + 2c_{12}c_{21}}}{2}$

$$(2) \quad af_3 = -(c_{11})_3 + c_{12}c_{21} \frac{3(c_{11} - 1) - \sqrt{1 + 2c_{12}c_{21}}}{2}$$

$$v = -3$$

$$c_{22} = c_{11} + \frac{3 + \sqrt{1 + 2c_{12}c_{21}}}{2}$$

$$(3) \quad af_3 = -\frac{(c_{11})_2 + c_{12}c_{21}}{c_{11} + 1} (2 + c_{11}(3 + c_{11}) - c_{12}c_{21}) + \frac{c_{12}bf_3}{3(c_{11} + 1)}$$

$$v = -2$$

$$c_{22} = c_{11} + 1$$

$$(4) \quad bf_3 = 3c_{12}c_{21}$$

$$v = -2$$

$$c_{11} = -1$$

$$c_{22} = 0$$

1.1.1.2

Para este caso, el sistema en $n = 3$ tiene por solución:

$$af_3 = -(c_{11})_3$$

$$bf_3 = -c_{21} \frac{6c_{11}^2 + (c_{22} + 3)(c_{22} + 4) + 3c_{11}(6 + c_{22})}{10}$$

$$(1) \quad bg_3 = -(c_{22})_3 + \frac{c_{21}ag_3}{3c_{11}}$$

$$(2) \quad ag_3 = 0$$

$$bg_3 = -(c_{22})_3$$

1.1.1.2.1

Los siguientes términos son:

$$af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = c_{21} \frac{10(c_{11} + 1)_3 + c_{22}(47 + 33c_{11} + 6c_{11}^2) + 3c_{22}^2(4 + c_{11}) + c_{22}^3}{15}$$

$$bg_4 = (c_{22})_4 + c_{21}ag_4 \frac{c_{22} + 3(c_{11} + 1)}{6(c_{11})_2}$$

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = \frac{-c_{21}}{21} [15c_{11}^4 + (c_{22} + 3)_4 + 10c_{11}^3(15 + c_{22}) + 3c_{11}^2(175 + 2c_{22}(c_{22} + 16) + c_{11}(750 + c_{22}(308 + 3c_{22}(17 + c_{22}))))]$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5 + c_{21}ag_5 \frac{c_{22}(7 + 3c_{11} + c_{22}) + 6(c_{11} + 1)(c_{11} + 2)}{10(c_{11})_3}$$

$$af_6 = (c_{11})_6$$

$$bf_6 = \frac{c_{21}}{28} [21c_{11}^5 + (c_{22} + 3)_5 + 15c_{11}^4(21 + c_{22}) + 5c_{11}^3(357 + 2c_{22}(c_{22} + 22)) + 3c_{11}^2(1575 + c_{22}(399 + 2c_{22}(23 + c_{22}))) + c_{11}(5754 + c_{22}(2906 + c_{22}(665 + 3c_{22}(24 + c_{22}))))]$$

$$bg_6 = (c_{22})_6 + \frac{2c_{21}ag_6}{3c_{11}} + c_{21}c_{22}ag_6 \frac{47 + 6c_{11}^2 + 3c_{11}(c_{22} + 11) + c_{22}(c_{22} + 12)}{15(c_{11})_4}$$

1.1.1.2.2

En este caso, el sistema se resuelve con los coeficientes:

$$af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = c_{21} \frac{10(c_{11} + 1)_3 + c_{22}(47 + 33c_{11} + 6c_{11}^2) + 3c_{22}^2(4 + c_{11}) + c_{22}^3}{15}$$

$$bg_4 = (c_{22})_4 + c_{21}ag_4 \frac{c_{22} + 3(c_{11} + 1)}{6(c_{11})_2}$$

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = \frac{-c_{21}}{21} [15c_{11}^4 + (c_{22} + 3)_4 + 10c_{11}^3(15 + c_{22}) + 3c_{11}^2(175 + 2c_{22}(c_{22} + 16) + c_{11}(750 + c_{22}(308 + 3c_{22}(17 + c_{22}))))]$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5 + c_{21}ag_5 \frac{c_{22}(7 + 3c_{11} + c_{22}) + 6(c_{11} + 1)(c_{11} + 2)}{10(c_{11})_3}$$

$$af_6 = (c_{11})_6$$

$$bf_6 = \frac{c_{21}}{28} [21c_{11}^5 + (c_{22} + 3)_5 + 15c_{11}^4(21 + c_{22}) + 5c_{11}^3(357 + 2c_{22}(c_{22} + 22)) + 3c_{11}^2(1575 + c_{22}(399 + 2c_{22}(23 + c_{22}))) + c_{11}(5754 + c_{22}(2906 + c_{22}(665 + 3c_{22}(24 + c_{22}))))]$$

$$bg_6 = (c_{22})_6 + \frac{2c_{21}ag_6}{3c_{11}} + c_{21}c_{22}ag_6 \frac{47 + 6c_{11}^2 + 3c_{11}(c_{22} + 11) + c_{22}(c_{22} + 12)}{15(c_{11})_4}$$

con lo cual, se ve que es un caso particular de 1.1.1.2.1.

1.1.1.3

Para $n = 3$, (A.1) tiene como soluciones posibles:

$$(1) \quad af_3 = -(c_{11})_3$$

$$bf_3 = -3c_{21} \frac{-1 + c_{11}(c_{11} + 2)(v + 1)(v + 3) + (3 + c_{11} + 2c_{22} + v(c_{11} + 2))^2}{2(v + 1)(v + 2)(v + 3)}$$

$$(2) \quad af_3 = -(c_{11})_3$$

$$bf_3 = -3c_{21} \frac{-1 + c_{11}(c_{11} + 2)(v + 1)(v + 3) + (3 + c_{11} + 2c_{22} + v(c_{11} + 2))^2}{2(v + 1)(v + 2)(v + 3)}$$

$$(3) \quad af_3 = -(c_{11})_3$$

$$v = -3$$

$$c_{21} = 0$$

$$(4) \quad af_3 = -(c_{11})_3$$

$$v = -2$$

$$c_{21} = 0$$

$$(5) \quad af_3 = -(c_{11})_3$$

$$v = -1$$

$$c_{21} = 0$$

$$(6) \quad af_3 = -(c_{11})_3$$

$$bf_3 = 0$$

$$c_{21} = 0$$

1.1.1.3.1

Y (A.2) tiene a:

$$(1) \quad bg_3 = -(c_{22})_3 \\ v = 3$$

$$(2) \quad ag_3 = 0 \\ bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$(3) \quad bg_3 = -(c_{22})_3 + \frac{c_{21}ag_3}{3c_{11}} \\ v = 2$$

$$(4) \quad bg_3 = -(c_{22})_3 + c_{21}ag_3 \frac{c_{22} + 2(c_{11} + 1)}{3(c_{11})_2} \\ v = 1$$

1.1.1.3.1.1

Si $n = 4$, el sistema se resuelve con:

$$af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = c_{21} \frac{20(c_{11} + 1)_3 + 2c_{22}(37 + c_{11}(27 + 5c_{11})) + c_{22}^2(15 + 4c_{11}) + c_{22}^3}{35}$$

y

$$(1) \quad bg_4 = (c_{22})_4 + \frac{c_{21}ag_4}{4c_{11}} \quad \circ$$

$$(2) \quad ag_4 = 0 \\ bg_4 = (c_{22})_4$$

1.1.1.3.1.1.1

Para éste, la solución es:

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = \frac{-c_{21}}{56} [35c_{11}^4 + (c_{22} + 4)_4 + 10c_{11}^3(35 + 2c_{22}) + 5c_{11}^2(245 + 2c_{22}(19 + c_{22})) + 2c_{11}(875 + c_{22}(299 + c_{22}(41 + 2c_{22})))]$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5 + c_{21}ag_5 \frac{c_{22} + 4(c_{11} + 1)}{10(c_{11})_2}$$

$$af_6 = (c_{11})_6$$

$$bf_6 = \frac{c_{21}}{84} [56c_{11}^5 + (c_{22} + 4)_5 + 35c_{11}^4(24 + 2c_{22}) + 10c_{11}^3(476 + c_{22}(51 + 2c_{22})) + 5c_{11}^2(2520 + c_{22}(549 + 2c_{22}(27 + c_{22}))) + 2c_{11}(7672 + c_{22}(3267 + c_{22}(627 + c_{22}(57 + 2c_{22}))))]$$

$$bg_g = (c_{22})_6 + \frac{c_{21}ag_6}{2c_{11}} + c_{21}c_{22}ag_6 \frac{c_{22} + 4(c_{11} + 1)}{10(c_{11})_2}$$

1.1.1.3.1.1.2

En este caso los términos siguientes son:

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = \frac{-c_{21}}{56} [35c_{11}^4 + (c_{22} + 4)_4 + 10c_{11}^3(35 + 2c_{22}) + 5c_{11}^2(245 + 2c_{22}(19 + c_{22})) + 2c_{11}(875 + c_{22}(299 + c_{22}(41 + 2c_{22})))]$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5 + c_{21}ag_5 \frac{c_{22} + 4(c_{11} + 1)}{10(c_{11})_2}$$

$$af_6 = (c_{11})_6$$

$$bf_6 = \frac{c_{21}}{84} [56c_{11}^5 + (c_{22} + 4)_5 + 35c_{11}^4(24 + 2c_{22}) + 10c_{11}^3(476 + c_{22}(51 + 2c_{22})) + 5c_{11}^2(2520 + c_{22}(549 + 2c_{22}(27 + c_{22}))) + 2c_{11}(7672 + c_{22}(3267 + c_{22}(627 + c_{22}(57 + 2c_{22}))))]$$

$$bg_g = (c_{22})_6 + \frac{c_{21}ag_6}{2c_{11}} + c_{21}c_{22}ag_6 \frac{c_{22} + 4(c_{11} + 1)}{10(c_{11})_2}$$

Por lo tanto, $\boxed{1.1.1.3.1.1.2}$ es un caso particular de $\boxed{1.1.1.3.1.1.1}$.

$\boxed{1.1.1.3.1.2}$

Si $n = 4$, el sistema se resuelve con:

$$af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = \frac{4c_{21}}{(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)} [c_{11}^3(v+1)(v+2)(v+3) + 6(c_{22} + v + 1)_3 + 3c_{11}^2(v+1)(v+2)(6 + c_{22} + 2v) + c_{11}(v+1)(6c_{22}^2 + 11(v+2)(v+3) + 3c_{22}(12 + 5v))]$$

y

$$(1) \quad bg_4 = (c_{22})_4$$

$$v = 4$$

$$(2) \quad ag_4 = 0$$

$$bg_4 = (c_{22})_4$$

$$(3) \quad v = 3$$

$$bg_4 = (c_{22})_4 + \frac{c_{21}ag_4}{4c_{11}}$$

$$(4) \quad af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = c_{21} \frac{10(c_{11} + 1)_3 + c_{22}(47 + 33c_{11} + 6c_{11}^2) + 3c_{22}^2(4 + c_{11}) + c_{22}^3}{15}$$

$$(5) \quad af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = c_{21} \frac{4(c_{11} + 1)_3 + 3c_{22}(c_{11}+2)_2 + 2(c_{22})_2(c_{11} + 3) + (c_{22})_3}{5}$$

$$v = 1$$

El caso $\boxed{1.1.1.3.1.2.2}$ continúa generando casos con las siguientes condiciones:

- (i) $c_{12} = 0$ y $v = n$, para $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $c_{21} = 0$ y $v = -n$, para $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) $c_{12} = 0$ y $c_{21} = 0$.

$\boxed{1.1.1.3.1.3}$

En este caso, la solución es:

$$af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = \frac{c_{21}}{15} [10(c_{11} + 1)_3 + c_{22}(47 + 33c_{11} + 6c_{11}^2) + 3c_{22}^2(4 + c_{11}) + c_{22}^3]$$

$$bg_4 = (c_{22})_4 + c_{21}ag_4 \frac{c_{22} + 3(c_{11} + 1)}{6(c_{22})_2}$$

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = \frac{-c_{21}}{21} [15c_{11}^4 + (c_{22} + 3)_4 + 10c_{11}^3(c_{22} + 15) + 3c_{11}^2(175 + 2c_{22}(16 + c_{22})) + c_{11}(750 + c_{22}(308 + 3c_{22}(17 + c_{22})))]$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5 + \frac{3c_{21}ag_5}{5c_{11}} + c_{21}c_{22}ag_5 \frac{c_{22} + 3c_{11} + 7}{10(c_{11})_3}$$

$$af_6 = (c_{11})_6$$

$$bf_6 = \frac{c_{21}}{28} [21c_{11}^5 + (c_{22} + 3)_5 + 15c_{11}^4(c_{22} + 21) + 5c_{11}^3(357 + 2c_{22}(22 + c_{22})) + 3c_{11}^2(1575 + c_{22}(399 + 2c_{22}(23 + c_{22}))) + c_{11}(5754 + c_{22}(665 + 3c_{22}(24 + c_{22})))]$$

$$bg_6 = (c_{22})_6 + \frac{2c_{21}ag_6}{3c_{11}} + c_{21}c_{22}ag_6 \frac{47 + 6c_{11}^2 + 3c_{11}(11 + c_{22}) + c_{22}(12 + c_{22})}{15(c_{11})_4}$$

1.1.1.3.1.4

Los siguientes términos son:

$$af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = c_{21} \frac{4(c_{11} + 1)_3 + 3c_{22}(c_{11} + 2)_2 + 2(c_{22})_2(c_{11} + 3) + (c_{22})_3}{5}$$

$$bg_4 = (c_{22})_4 + \frac{bf_3ag_4}{af_3}$$

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = -c_{21} \frac{5(c_{11} + 1)_4 + 4c_{22}(c_{11} + 2)_3 + 3(c_{22})_2(c_{11} + 3)_2 + 2(c_{22})_3(c_{11} + 4) + (c_{22})_4}{6}$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5 + \frac{bf_4ag_5}{af_4}$$

$$af_6 = (c_{11})_6$$

$$bf_6 = \frac{c_{21}}{7} [6(c_{11} + 1)_5 + 5c_{22}(c_{11} + 2)_4 + 4(c_{22})_2(c_{11} + 3)_3 + 3(c_{22})_3(c_{11} + 4)_2 + 2(c_{22})_4(c_{11} + 5) + (c_{22})_5]$$

$$bg_6 = (c_{22})_6 + \frac{bf_5ag_6}{af_5}$$

El caso 1.1.1.3.2 es igual a 1.1.1.3.1.

1.1.1.3.3

Los coeficientes consecutivos son:

$$\begin{aligned}
ag_3 &= 0 \\
bg_3 &= -(c_{22})_3 \\
af_4 &= (c_{11})_4 \\
ag_4 &= 0 \\
bg_4 &= (c_{22})_4 \\
af_5 &= -(c_{11})_5 \\
ag_5 &= 0 \\
bg_5 &= -(c_{22})_5 \\
af_6 &= (c_{11})_6 \\
ag_6 &= 0 \\
bg_6 &= (c_{22})_6
\end{aligned}$$

1.1.1.3.4

Este caso continúa con:

$$\begin{aligned}
ag_3 &= 0 \\
bg_3 &= -(c_{22})_3 \\
af_4 &= (c_{11})_4 \\
ag_4 &= 0 \\
bg_4 &= (c_{22})_4 \\
af_5 &= -(c_{11})_5 \\
ag_5 &= 0 \\
bg_5 &= -(c_{22})_5 \\
af_6 &= (c_{11})_6 \\
ag_6 &= 0 \\
bg_6 &= (c_{22})_6
\end{aligned}$$

1.1.1.3.5

Para los siguientes n tenemos:

$$\begin{aligned}
ag_3 &= 0 \\
bg_3 &= -(c_{22})_3 \\
af_4 &= (c_{11})_4 \\
ag_4 &= 0 \\
bg_4 &= (c_{22})_4 \\
af_5 &= -(c_{11})_5 \\
ag_5 &= 0 \\
bg_5 &= -(c_{22})_5 \\
af_6 &= (c_{11})_6 \\
ag_6 &= 0 \\
bg_6 &= (c_{22})_6
\end{aligned}$$

Así, [1.1.1.3.3](#) y [1.1.1.3.4](#) son casos particulares de [1.1.1.3.5](#).

1.1.1.3.6

Si $n = 3$, la ecuación (A.2) tiene las posibles soluciones:

$$(1) \quad \begin{aligned} bg_3 &= -(c_{22})_3 \\ v &= 1 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} bg_3 &= -(c_{22})_3 \\ v &= 2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} bg_3 &= -(c_{22})_3 \\ v &= 3 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} ag_3 &= 0 \\ bg_3 &= -(c_{22})_3 \end{aligned}$$

Vemos que $\boxed{1.1.1.3.6.2}$ y $\boxed{1.1.1.3.6.3}$ son casos particulares de $\boxed{1.1.1.2.1}$ y $\boxed{1.1.1.3.1.1.1}$, mientras que $\boxed{1.1.1.3.6.4}$ uno de los casos que genera $\boxed{1.1.1.3.1.2.2}$, que a su vez es caso particular de $\boxed{1.1.1.3.5}$.

$\boxed{1.1.1.3.6.1}$

A partir de $n = 4$, el sistema se resuelve con

$$af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = 0$$

$$bg_4 = (c_{22})_4$$

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = 0$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5$$

$$af_6 = (c_{11})_6$$

$$bf_6 = 0$$

$$bg_6 = (c_{22})_6$$

$\boxed{1.1.1.4}$

En este caso, el sistema se resuelve con:

$$af_3 = -(c_{11})_3$$

$$bf_3 = -c_{21} \frac{6 + 3c_{11}(c_{11} + 3) + 5c_{22} + 2c_{11}c_{22} + c_{22}^2}{4}$$

$$bg_3 = -(c_{22})_3 + c_{21}ag_3 \frac{c_{22} + 2(c_{11} + 1)}{3(c_{11})_2}$$

$$af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = c_{21} \frac{4(c_{11} + 1)_3 + 3c_{22}(c_{11} + 2)_2 + 2(c_{22})_2(c_{11} + 3) + (c_{22})_3}{5}$$

$$bg_4 = (c_{22})_4 + \frac{bf_3ag_4}{af_3}$$

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = -c_{21} \frac{5(c_{11} + 1)_4 + 4c_{22}(c_{11} + 2)_3 + 3(c_{22})_2(c_{11} + 3)_2 + 2(c_{22})_3(c_{11} + 4) + (c_{22})_4}{6}$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5 + \frac{bf_4ag_5}{af_4}$$

$$af_6 = (c_{11})_6$$

$$bf_6 = \frac{c_{21}^2}{7} [6(c_{11} + 1)_5 + 5c_{22}(c_{11} + 2)_4 + 4(c_{22})_2(c_{11} + 3)_3 + 3(c_{22})_3(c_{11} + 4)_2 + 2(c_{22})_4(c_{11} + 5) + (c_{22})_5]$$

$$bg_6 = (c_{22})_6 + \frac{bf_5 ag_6}{af_5}$$

Así, $\boxed{1.1.1.3.1.4}$ y $\boxed{1.1.1.3.6.1}$ son casos particulares de $\boxed{1.1.1.4}$.

$\boxed{1.1.2}$

Los términos que resuelven el sistema a partir de $n = 2$ son:

$$ag_2 = c_{12} \frac{c_{11} + 3(c_{22} + 1)}{6}$$

$$bg_2 = (c_{22})_2$$

$$af_3 = -(c_{11})_3 + \frac{c_{12}}{3c_{22}} bf_3$$

$$ag_3 = -c_{12} \frac{c_{11}^2 + 6(c_{22} + 1)_2 + c_{11}(7 + 3c_{22})}{10}$$

$$bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$af_4 = (c_{11})_4 + \frac{ag_2 bf_4}{bg_2}$$

$$ag_4 = c_{12} \frac{c_{11}^3 + 10(c_{22} + 1)_3 + 3c_{11}^2(4 + 3c_{22}) + c_{11}(47 + 33c_{22} + 6c_{22}^2)}{15}$$

$$bg_4 = (c_{22})_4$$

$$af_5 = -(c_{11})_5 + \frac{ag_3 bf_5}{bg_3}$$

$$ag_5 = \frac{-c_{12}}{21} [c_{11}^4 + 156(c_{22} + 1)_4 + 3c_{11}^3(6 + c_{22}) + c_{11}^2(119 + 51c_{22} + 6c_{22}^2) + 2c_{11}(171 + c_{22}(154 + c_{22}(48 + 5c_{22})))]$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5$$

$$af_6 = (c_{11})_6 + \frac{ag_4 bf_6}{bg_4}$$

$$ag_6 = \frac{c_{12}}{28} [c_{11}^5 + 21(c_{22} + 1)_5 + c_{11}^4(25 + 3c_{22}) + c_{11}^3(245 + 6c_{22}(12 + c_{22})) + c_{11}^2(1175 + c_{22}(665 + 2c_{22}(69 + 5c_{22}))) + c_{11}(2754 + c_{22}(2906 + c_{22}(1197 + 5c_{22}(44 + 3c_{22}))))]$$

$$bg_6 = (c_{22})_6$$

$\boxed{1.1.3}$

Si $n = 2$, la ecuación (A.2) tiene las posibles soluciones:

$$(1) \quad ag_2 = 2c_{12} \frac{c_{11} - (c_{22} + 1)(v - 1)}{(v - 1)(v - 2)}$$

$$bg_2 = (c_{22})_2$$

$$(2) \quad bg_2 = (c_{22})_2$$

$$c_{12} = 0$$

$$v = 1$$

$$(3) \quad bg_2 = (c_{22})_2$$

$$v = 2$$

$$(4) \quad \begin{aligned} ag_2 &= 0 \\ bg_2 &= (c_{22})_2 \\ c_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Sólo consideramos el caso $\boxed{1.1.3.1}$ ya que $\boxed{1.1.3.2}$, $\boxed{1.1.3.3}$ y $\boxed{1.1.3.4}$ son iguales a $\boxed{1.1.1.3.6.1}$, $\boxed{1.1.1.3.6.2}$ y $\boxed{1.1.1.3.6.4}$, respectivamente.

$\boxed{1.1.3.1}$

Para $n = 3$ la ecuación (A.1) se resuelve con:

$$(1) \quad \begin{aligned} af_3 &= -(c_{11})_3 \\ v &= -3 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} af_3 &= -(c_{11})_3 \\ bf_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} af_3 &= -(c_{11})_3 + \frac{c_{12}bf_3}{3c_{22}} \\ v &= -2 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} af_3 &= -(c_{11})_3 + c_{12}bf_3 \frac{c_{11} + 2(c_{22} + 2)}{3(c_{22})_2} \\ v &= -1 \end{aligned}$$

$\boxed{1.1.3.1.1}$

Los siguientes términos de este caso son:

$$\begin{aligned} ag_3 &= -c_{12} \frac{c_{11}^2 + 10(c_{22} + 1)_2 + c_{11}(9 + 4c_{22})}{20} \\ bg_3 &= -(c_{22})_3 \\ af_4 &= (c_{11})_4 + \frac{c_{12}bg_4}{4c_{22}} \\ ag_4 &= c_{12} \frac{c_{11}^3 + 20(c_{22} + 1)_3 + c_{11}^2(15 + 4c_{22}) + 2c_{11}(37 + c_{22}(27 + 5c_{22}))}{35} \\ bg_4 &= (c_{22})_4 \\ af_5 &= -(c_{11})_5 + c_{12}bf_5 \frac{c_{11} + 4(c_{22} + 1)}{10(c_{22})_2} \\ ag_5 &= \frac{-c_{12}}{56} [(c_{11} + 4)_4 + 2c_{22}(875 + c_{11}(299 + c_{11}(41 + 2c_{11}))) + 5c_{22}^2(245 + 2c_{11}(19 + c_{11})) + \\ &\quad + 10c_{22}^3(35 + 2c_{11}) + 35c_{22}^4] \\ bg_5 &= -(c_{22})_5 \\ af_6 &= (c_{11})_6 + c_{12}bf_6 \frac{ag_3}{bg_3} \\ ag_6 &= \frac{c_{12}}{84} [c_{11}^5 + 56(c_{22} + 1)_5 + c_{11}^4(30 + 4c_{22}) + c_{11}^3(355 + 2c_{22}(57 + 5c_{22})) + 2c_{11}^2(1035 + \\ &\quad + c_{22}(627 + 5c_{22}(27 + 2c_{22}))) + c_{11}(5944 + c_{22}(6534 + 5c_{22}(549 + c_{22}(102 + 7c_{22}))))] \\ bg_6 &= (c_{22})_6 \end{aligned}$$

$\boxed{1.1.3.1.2}$

Si $n = 3$, las posibles soluciones de (A.2) son:

$$(1) \quad ag_3 = 3c_{12} \frac{2c_{11}^2 + (c_{22} + 1)_2(v-1)(v-2) + 2c_{11}(3 + c_{22} - v(c_{22} + 2))}{(v-1)(v-2)(v-3)}$$

$$bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$(2) \quad bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$c_{12} = 0$$

$$v = 1$$

$$(3) \quad bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$c_{12} = 0$$

$$v = 2$$

$$(4) \quad bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$c_{12} = 0$$

$$v = 3$$

$$(5) \quad ag_3 = 0$$

$$bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$c_{12} = 0$$

Seguiremos analizando $\boxed{1.1.3.1.2.1}$, ya que los demás se corresponden con los casos $\boxed{1.1.1.3.6.1}$, $\boxed{1.1.1.3.6.2}$, $\boxed{1.1.1.3.6.3}$ y $\boxed{1.1.1.3.6.4}$, respectivamente.

$\boxed{1.1.3.1.2.1}$

Para $n = 4$, de la ecuación (A.1) tenemos:

$$(1) \quad af_4 = (c_{11})_4$$

$$v = -4$$

$$(2) \quad af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = 0$$

$$(3) \quad af_4 = (c_{11})_4 + \frac{c_{12}bf_4}{4c_{22}}$$

$$v = -3$$

$$(4) \quad af_4 = (c_{11})_4 + c_{12}bf_4 \frac{c_{11} + 3(c_{22} + 1)}{6(c_{22})_2}$$

$$v = -2$$

$$(5) \quad af_4 = (c_{11})_4 + c_{12}bf_4 \frac{c_{11}^2 + 3(c_{22} + 1)_2 + c_{11}(5 + 2c_{22})}{4(c_{22})_2}$$

$$v = -1$$

Vemos que $\boxed{1.1.3.1.2.1.3}$ y $\boxed{1.1.3.1.2.1.4}$ son casos particulares de $\boxed{1.1.3.1.1}$ y $\boxed{1.1.2}$. Continuamos analizando los demás.

$\boxed{1.1.3.1.2.1.1}$

$$\begin{aligned}
ag_4 &= c_{12} \frac{c_{11}^3 + 35(c_{22} + 1)_3 + c_{11}^2(18 + 5c_{22}) + c_{11}(107 + 5c_{22}(16 + 3c_{22}))}{70} \\
bg_4 &= (c_{22})_4 \\
af_5 &= -(c_{11})_5 + \frac{c_{12}bf_5}{5c_{22}} \\
ag_5 &= \frac{-c_{12}}{126} [(c_{11} + 5)_4 + 5c_{22}(700 + c_{11}(205 + c_{11}(24 + c_{11}))) + 5c_{22}^2(490 + 3c_{11}(22 + c_{11})) + \\
&\quad + 35c_{22}^3(20 + c_{11}) + 70c_{22}^4] \\
bg_5 &= -(c_{22})_5 \\
af_6 &= (c_{11})_6 + c_{12}bf_6 \frac{c_{11} + 5(c_{22} + 1)}{15(c_{22})_2} \\
ag_6 &= \frac{c_{12}}{210} [c_{11}^5 + 126(c_{22} + 1)_5 + 5c_{11}^4(7 + c_{22}) + 5c_{11}^3(97 + 3c_{22}(11 + c_{22})) + 5c_{11}^2(665 + \\
&\quad + c_{22}(421 + c_{22}(93 + 7c_{22}))) + c_{11}(11274 + 5c_{22}(2545 + c_{22}(1084 + 7c_{22}(29 + 2c_{22}))))] \\
bg_6 &= (c_{22})_6
\end{aligned}$$

1.1.3.1.2.1.2

La ecuación (A.2) para $n = 4$ da las posibilidades:

- (1) $ag_4 = \frac{4c_{12}}{(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)} [6c_{11}^3 - (c_{22} + 1)_3(v-1)(v-2)(v-3) + 6c_{11}^2(6 + c_{22} - (3 + c_{22})v) + 3c_{11}(2(11 + c_{22}(6 + c_{22})) - (3 + c_{22})(8 + 3c_{22})v + (c_{22} + 2)_2v^2)]$
 $bg_4 = (c_{22})_4$
- (2) $bg_4 = (c_{22})_4$
 $c_{12} = 0$
 $v = 1$
- (3) $bg_4 = (c_{22})_4$
 $c_{12} = 0$
 $v = 2$
- (4) $bg_4 = (c_{22})_4$
 $c_{12} = 0$
 $v = 3$
- (5) $bg_4 = (c_{22})_4$
 $c_{12} = 0$
 $v = 4$
- (6) $ag_4 = 0$
 $bg_4 = (c_{22})_4$
 $c_{12} = 0$

Los casos $\boxed{1.1.3.1.2.1.2.2}$, $\boxed{1.1.3.1.2.1.2.3}$, $\boxed{1.1.3.1.2.1.2.4}$ y $\boxed{1.1.3.1.2.1.2.6}$ son iguales a $\boxed{1.1.1.3.6.1}$, $\boxed{1.1.1.3.6.2}$, $\boxed{1.1.1.3.6.3}$ y $\boxed{1.1.1.3.6.4}$. Y $\boxed{1.1.3.1.2.1.2.5}$ es un caso particular de $\boxed{1.1.1.3.6.1}$.

1.1.3.1.2.1.2.1

Si $n = 5$, la única solución relevante de (A.1) es

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = 0$$

y de (A.2) lo es

$$ag_5 = \frac{5c_{12}}{(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)} [24c_{11}^4 + (c_{22}+1)_4(v-1)(v-2)(v-3)(v-4) - 24c_{11}^3(-10 + c_{22}(v-1) + 4v) + 12c_{11}^2(2(35 + c_{22}(10 + c_{22})) - 3v(c_{22} + 4)_2 + v^2(c_{22} + 3)_2) + 4c_{11}(6(5 + c_{22})(10 + c_{22}(5 + c_{22})) - (4 + c_{22})(105 + c_{22}(64 + 11c_{22})))v + 3(c_{22} + 3)_2(5 + 2c_{22})v^2 - (c_{22} + 2)_3v^3]$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5$$

pues las demás ya fueron estudiadas.

Para $n = 6$ el sistema se resuelve con

$$af_6 = (c_{11})_6$$

$$bf_6 = 0$$

$$ag_6 = \frac{6c_{12}}{(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)(v-6)} [120c_{11}^5 - 120c_{11}^4(5(v-3) + c_{22}(v-1)) - (c_{22}+1)_5(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5) + 60c_{11}^3(2(85 + c_{22}(15 + c_{22})) - 3(5 + c_{22})(8 + c_{22})v + (c_{22} + 4)_2v^2) - 20c_{11}^2(-6(225 + c_{22}(85 + c_{22}(15 + c_{22}))) + (5 + c_{22})(306 + c_{22}(104 + 11c_{22})))v - 3(c_{22} + 4)_2(9 + 2c_{22})v^2 + (c_{22} + 3)_3v^3) + 5c_{11}(24(274 + c_{22}(225 + c_{22}(85 + c_{22}(15 + c_{22})))) - 2(5 + c_{22})(1080 + c_{22}(840 + c_{22}(247 + 25c_{22}))))v + (c_{22} + 4)_2(306 + c_{22}(199 + 35c_{22}))v^2 - 2(c_{22} + 3)_3(12 + 5c_{22})v^3 + (c_{22} + 2)_4v^4]$$

$$bg_6 = (c_{22})_6$$

ya que al igual que para el n anterior, los demás casos ya fueron vistos. Estos coeficientes indican que este es un caso particular de 1.1.1.1.1.

1.1.3.1.2.1.5

Los siguientes términos son:

$$ag_4 = c_{12} \frac{c_{11}^3 + 4(c_{22} + 1)_3 + c_{11}^2(9 + 2c_{22}) + c_{11}(26 + c_{22}(17 + 3c_{22}))}{5}$$

$$bg_4 = (c_{22})_4$$

$$af_5 = -(c_{11})_5 + c_{12}bf_5 \frac{ag_4}{bg_4}$$

$$ag_5 = \frac{-c_{12}}{6} [(c_{11}^4 + 5(c_{22} + 1)_4 + 2c_{11}^3(7 + c_{22}) + c_{11}^2(71 + 3c_{22}(9 + c_{22})) + c_{11}(154 + c_{22}(129 + c_{22}(39 + 4c_{22}))))]$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5$$

$$af_6 = (c_{11})_6 + c_{12}bf_6 \frac{ag_5}{bg_5}$$

$$ag_6 = \frac{c_{12}}{7} [c_{11}^5 + 6(c_{22} + 1)_5 + 2c_{11}^4(10 + c_{22}) + c_{11}^3(155 + 3c_{22}(13 + c_{22})) + c_{11}^2(580 + c_{22}(291 + c_{22}(57 + 4c_{22}))) + c_{11}(1044 + c_{22}(1024 + c_{22}(409 + c_{22}(74 + 5c_{22}))))]$$

$$bg_6 = (c_{22})_6$$

1.1.4

$$ag_2 = c_{12} \frac{c_{11} + 2(c_{22} + 1)(v - 1)}{3}$$

$$bg_2 = (c_{22})_2$$

$$af_3 = -(c_{11})_3 + \frac{ag_2bf_3}{bg_2}$$

$$ag_3 = -c_{12} \frac{c_{11}^2 + 3(c_{22} + 1)_2 + c_{11}(5 + 2c_{22})}{4}$$

$$bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$af_4 = -(c_{11})_3 + \frac{ag_2bf_3}{bg_2}$$

$$ag_4 = c_{12} \frac{c_{11}^3 + 4(c_{22} + 1)_3 + c_{11}^2(9 + 2c_{22}) + c_{11}(26 + c_{22}(17 + 3c_{22}))}{5}$$

$$bg_4 = (c_{22})_4$$

$$af_5 = -(c_{11})_5 + c_{12}bf_5 \frac{ag_4}{bg_4}$$

$$ag_5 = \frac{-c_{12}}{6} [(c_{11}^4 + 5(c_{22} + 1)_4 + 2c_{11}^3(7 + c_{22}) + c_{11}^2(71 + 3c_{22}(9 + c_{22})) + c_{11}(154 + c_{22}(129 + c_{22}(39 + 4c_{22}))))]$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5$$

$$af_6 = (c_{11})_6 + c_{12}bf_6 \frac{ag_5}{bg_5}$$

$$ag_6 = \frac{c_{12}}{7} [c_{11}^5 + 6(c_{22} + 1)_5 + 2c_{11}^4(10 + c_{22}) + c_{11}^3(155 + 3c_{22}(13 + c_{22})) + c_{11}^2(580 + c_{22}(291 + c_{22}(57 + 4c_{22})))c_{11}(1044 + c_{22}(1024 + c_{22}(409 + c_{22}(74 + 5c_{22}))))]$$

$$bg_6 = (c_{22})_6$$

Con lo cual, este caso es [1.1.3.1.2.1.5](#).

1.2

La ecuación (A.1) para $n = 2$ tiene por soluciones posibles:

$$(1) \quad af_2 = (c_{11})_2$$

$$bf_2 = 2c_{21} \frac{c_{22} + (c_{11} + 1)}{(v + 1)(v + 2)}$$

$$(2) \quad af_2 = (c_{11})_2$$

$$c_{21} = 0$$

$$v = -2$$

$$(3) \quad af_2 = (c_{11})_2$$

$$c_{21} = 0$$

$$v = -1$$

$$(4) \quad af_2 = (c_{11})_2$$

$$bf_2 = 0$$

$$c_{21} = 0$$

De este resultado, podemos ver que [1.2.2](#) y [1.2.3](#) se corresponden con [1.1.1.3.4](#) y [1.1.1.3.5](#).

1.2.1

Si $n = 2$, la ecuación (A.2) se satisface con:

$$(1) \quad \begin{aligned} bg_2 &= (c_{22})_2 \\ v &= 2 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} ag_2 &= 0 \\ bg_2 &= (c_{22})_2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} bg_2 &= (c_{22})_2 + \frac{c_{21}ag_2}{2c_{11}} \\ v &= 1 \end{aligned}$$

De estas tres posibilidades, continuaremos con la segunda ya que $\boxed{1.2.1.1}$ y $\boxed{1.2.1.3}$ son los casos $\boxed{1.1.1.2.1}$ y $\boxed{1.1.1.4}$.

$\boxed{1.2.1.2}$

De la ecuación (A.1) para $n = 3$ obtenemos

$$(1) \quad \begin{aligned} af_3 &= -(c_{11})_3 \\ bf_3 &= -3c_{21} \frac{-1 + c_{11}(c_{11} + 2)(v + 1)(v + 3) + (3 + c_{11} + 2c_{22} + v(c_{11} + 2))^2}{2(v + 1)(v + 2)(v + 3)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} af_3 &= -(c_{11})_3 \\ c_{21} &= 0 \\ v &= -3 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} af_3 &= -(c_{11})_3 \\ c_{21} &= 0 \\ v &= -2 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} af_3 &= -(c_{11})_3 \\ c_{21} &= 0 \\ v &= -1 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} af_3 &= -(c_{11})_3 \\ bf_3 &= 0 \\ c_{21} &= 0 \end{aligned}$$

De estos 5 casos, $\boxed{1.2.1.2.2}$, $\boxed{1.2.1.2.3}$ y $\boxed{1.2.1.2.4}$ son $\boxed{1.1.1.3.3}$, $\boxed{1.1.1.3.4}$ y $\boxed{1.1.1.3.5}$, respectivamente.

$\boxed{1.2.1.2.1}$

De la ecuación (A.1) para $n = 3$ obtenemos

$$(1) \quad \begin{aligned} bg_3 &= -(c_{22})_3 \\ v &= 3 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} ag_3 &= 0 \\ bg_3 &= -(c_{22})_3 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} bg_3 &= -(c_{22})_3 + \frac{c_{21}ag_3}{3c_{11}} \\ v &= 2 \end{aligned}$$

$$(4) \quad bg_3 = -(c_{22})_3 + c_{21}ag_3 \frac{c_{22} + 2(c_{11} + 1)}{3(c_{11})_2}$$

$$v = 1$$

De estos, consideraremos el segundo caso ya que los demás se corresponden con 1.1.1.3.1.1.1, 1.1.1.2.1 y 1.1.1.3.1.4.

1.2.1.2.1.2

Para $n = 4$, el sistema se resuelve con:

$$af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = \frac{4c_{21}}{(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)} [c_{11}^3(v+1)(v+2)(v+3) + 6(c_{22} + v + 1)_3 + 3c_{11}^2(v+1)(v+2)(6 + c_{22} + 2v) + c_{11}(v+1)(6c_{22}^2 + 11(v+2)(v+3) + 3c_{22}(12 + 5v))]$$

y

$$(1) \quad bg_4 = (c_{22})_4$$

$$v = 4$$

$$(2) \quad ag_4 = 0$$

$$bg_4 = (c_{22})_4$$

$$(3) \quad bg_4 = (c_{22})_4 + \frac{c_{21}ag_4}{4c_{11}}$$

$$v = 3$$

$$(4) \quad bg_4 = (c_{22})_4 + \frac{ag_4af_2}{bf_2}$$

$$v = 2$$

$$(5) \quad bg_4 = (c_{22})_4 + \frac{ag_4af_3}{bf_3}$$

$$v = 1$$

El único caso que sobrevive es 1.2.1.2.1.2.2, ya que los restantes son respectivamente 1.1.3.1.2.1.2.7, 1.1.1.3.1.1.1, 1.1.1.2.1 y 1.1.1.4.

1.2.1.2.1.2.2

Para los siguientes n , sólo es relevante la solución:

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = \frac{-5c_{21}}{(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)(v+5)} [c_{11}^4(1+v)_4 + 24(c_{22} + v + 1)_4 + 2c_{11}^3(1+v)_3(2c_{22} + 5(4+v)) + c_{11}^2(1+v)_2(12c_{22}^2 + 35(3+v)_2 + 12c_{22}(10+3v)) + 2c_{11}(1+v)(12c_{22}^3 + 25(2+v)_3 + 6c_{22}^2(20+7v) + 2c_{22}(7+2v)(30+13v))]$$

$$ag_5 = 0$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5$$

$$af_6 = (c_{11})_6$$

$$\begin{aligned}
bf_6 &= \frac{6c_{21}}{(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)(v+5)(v+6)} [c_{11}^5(1+v)_5 + 120(c_{22}+v+1)_5 + \\
&+ 5c_{11}^4(1+v)_4(c_{22}+3(5+v)) + 5c_{11}^3(1+v)_3(4c_{22}^2+17(4+v)_2+2c_{22}(30+7v)) + \\
&+ 5c_{11}^2(1+v)_2(12c_{22}^3+45(3+v)_3+12c_{22}^2(15+4v)+c_{22}(1020+v(545+71v))) + \\
&+ 2c_{11}(1+v)(60c_{22}^4+137(2+v)_4+90c_{22}^3(10+3v)+10c_{22}^2(510+v(316+47v)) + \\
&+ 5c_{22}(2700+v(2580+v(787+77v))))] \\
ag_6 &= 0 \\
bg_6 &= (c_{22})_6
\end{aligned}$$

ya que las demás son casos particulares de casos anteriores. Y a su vez, dicha solución es un caso particular de [1.1.1.1.1](#).

1.2.4

Si $n = 2$, las soluciones posibles de (A.2) son:

- (1) $bg_2 = (c_{22})_2$
 $v = 1$
- (2) $bg_2 = (c_{22})_2$
 $v = 2$
- (3) $ag_2 = 0$
 $bg_2 = (c_{22})_2$

Podemos ver fácilmente que [1.2.4.1](#) es [1.1.1.3.6.1](#) y [1.2.4.2](#) es [1.1.1.3.6.2](#).

1.2.4.3

De (A.1) para $n = 3$ obtenemos:

- (1) $af_3 = -(c_{11})_3$
 $v = -3$
- (2) $af_3 = -(c_{11})_3$
 $v = -2$
- (3) $af_3 = -(c_{11})_3$
 $v = -1$
- (4) $af_3 = -(c_{11})_3$
 $bf_3 = 0$

Pero estas posibilidades se reducen a [1.1.1.3.3](#), [1.1.1.3.4](#), [1.1.1.3.5](#) y [1.1.1.3.6.4](#).

Caso 2

Para $n = 1$, la ecuación (A.2) se resuelve con:

$$\begin{aligned}
ag_1 &= \frac{c_{12}}{v-1} \\
bg_1 &= -c_{22}
\end{aligned}$$

Para $n = 2$, (A.1) da los posibles casos:

$$(1) \quad af_2 = (c_{11})_2 \\ v = -2$$

$$(2) \quad af_2 = (c_{11})_2 \\ bf_2 = 0$$

$$(3) \quad af_2 = (c_{11})_2 + \frac{c_{12}bf_2}{2c_{22}} \\ v = -1$$

de los cuales, $\boxed{2.1}$ es $\boxed{1.1.2}$ y $\boxed{2.3}$ es $\boxed{1.1.3.1.2.1.5}$.

$\boxed{2.2}$

De la igualdad (A.2) para $n = 2$ surgen:

$$(1) \quad ag_2 = 2c_{12} \frac{c_{11} - (c_{22} + 1)(v - 1)}{(v - 1)(v - 2)}$$

$$bg_2 = (c_{22})_2$$

$$(2) \quad bg_2 = (c_{22})_2$$

$$c_{12} = 0$$

$$v = 1$$

$$(3) \quad bg_2 = (c_{22})_2$$

$$c_{12} = 0$$

$$v = 2$$

$$(4) \quad ag_2 = 0$$

$$bg_2 = (c_{22})_2$$

$$c_{12} = 0$$

De estos, $\boxed{2.2.2}$ y $\boxed{2.2.3}$ son los ya analizados $\boxed{1.1.1.3.6.1}$ y $\boxed{1.1.1.3.6.2}$, respectivamente.

$\boxed{2.2.1}$

Si $n = 3$, de (A.1) obtenemos

$$(1) \quad af_3 = -(c_{11})_3 \\ v = -3$$

$$(2) \quad af_3 = -(c_{11})_3 \\ bf_3 = 0$$

$$(3) \quad af_3 = -(c_{11})_3 + \frac{c_{12}bf_3}{3c_{22}} \\ v = -2$$

$$(4) \quad af_3 = -(c_{11})_3 + c_{12}bf_3 \frac{c_{11} + 2(c_{22} + 1)}{3(c_{22})_2} \\ v = -1$$

Claramente, $\boxed{2.2.1.1}$, $\boxed{2.2.1.3}$ y $\boxed{2.2.1.4}$ son los respectivos $\boxed{1.1.3.1.1}$, $\boxed{1.1.2}$ y $\boxed{1.1.3.1.2.1.5}$.

$\boxed{2.2.1.2}$

Si $n = 3$, las soluciones posibles de (A.2) son

$$(1) \quad ag_3 = 3c_{12} \frac{2c_{11}^2 + (c_{22} + 1)_2(v - 2)(v - 2) + 2c_{11}(3 + c_{22} - v(c_{22} + 2))}{(v - 1)(v - 2)(v - 3)}$$

$$bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$(2) \quad bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$c_{12} = 0$$

$$v = 1$$

$$(3) \quad bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$c_{12} = 0$$

$$v = 2$$

$$(4) \quad bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$c_{12} = 0$$

$$v = 3$$

$$(5) \quad ag_3 = 0$$

$$bg_3 = -(c_{22})_3$$

$$c_{12} = 0$$

De estos resultados, $\boxed{2.2.1.2.2}$ es $\boxed{1.1.1.3.6.1}$, $\boxed{2.2.1.2.3}$ es $\boxed{1.1.1.3.6.2}$, y $\boxed{2.2.1.2.4}$ es $\boxed{1.1.1.3.6.3}$.

$\boxed{2.2.1.2.1}$

La igualdad (A.1) para $n = 4$ genera

$$(1) \quad af_4 = (c_{11})_4$$

$$v = -4$$

$$(2) \quad af_4 = (c_{11})_4$$

$$bf_4 = 0$$

$$(3) \quad af_4 = (c_{11})_4 + \frac{c_{12}bf_4}{4c_{22}}$$

$$v = -3$$

$$(4) \quad af_4 = (c_{11})_4 + c_{12}bf_4 \frac{c_{11} + 3(c_{22} + 1)}{6(c_{22})_2}$$

$$v = -2$$

$$(5) \quad af_4 = (c_{11})_4 + c_{12}bf_4 \frac{c_{11}^2 + 3(c_{22} + 1)_2 + c_{11}(5 + 2c_{22})}{4(c_{22})_2}$$

$$v = -1$$

Sólo continuamos trabajando con el segundo caso, ya que los demás son, respectivamente, $\boxed{1.1.3.1.2.1.1}$, $\boxed{1.1.3.1.2.1.3}$, $\boxed{1.1.3.1.2.1.4}$ y $\boxed{1.1.3.1.2.1.5}$.

$\boxed{2.2.1.2.1.2}$

Las soluciones relevantes del sistema para $n = 4$, $n = 6$ y $n = 6$ son:

$$ag_4 = \frac{4c_{12}}{(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)} [6c_{11}^3 - (c_{22}+1)_3(v-1)(v-2)(v-3) + 6c_{11}^2(6+c_{22}-v(3+c_{22})) + 3c_{11}(2(11+c_{22}(6+c_{22})) - (3+c_{22})v(8+3c_{22}) + v^2(c_{22}+2)_2)]$$

$$bg_4 = (c_{22})_4$$

$$af_5 = -(c_{11})_5$$

$$bf_5 = 0$$

$$ag_5 = \frac{5c_{12}}{(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)} [(24c_{11}^4 + (c_{22}+1)_4(v-1)(v-2)(v-3)(v-4) - 24c_{11}^3(-10+c_{22}(v-1)+4v) + 12c_{11}^2(2(35+c_{22}(10+c_{22})) - 3v(c_{22}+4)_2 + v^2(c_{22}+3)_2) + 4c_{11}(6(5+c_{22})(10+c_{22}(5+c_{22})) - (4+c_{22})(105+c_{22}(64+11c_{22})))v + 3(c_{22}+3)_2(5+2c_{22})v^2 - (c_{22}+2)_3v^3)]$$

$$bg_5 = -(c_{22})_5$$

$$af_6 = (c_{11})_6$$

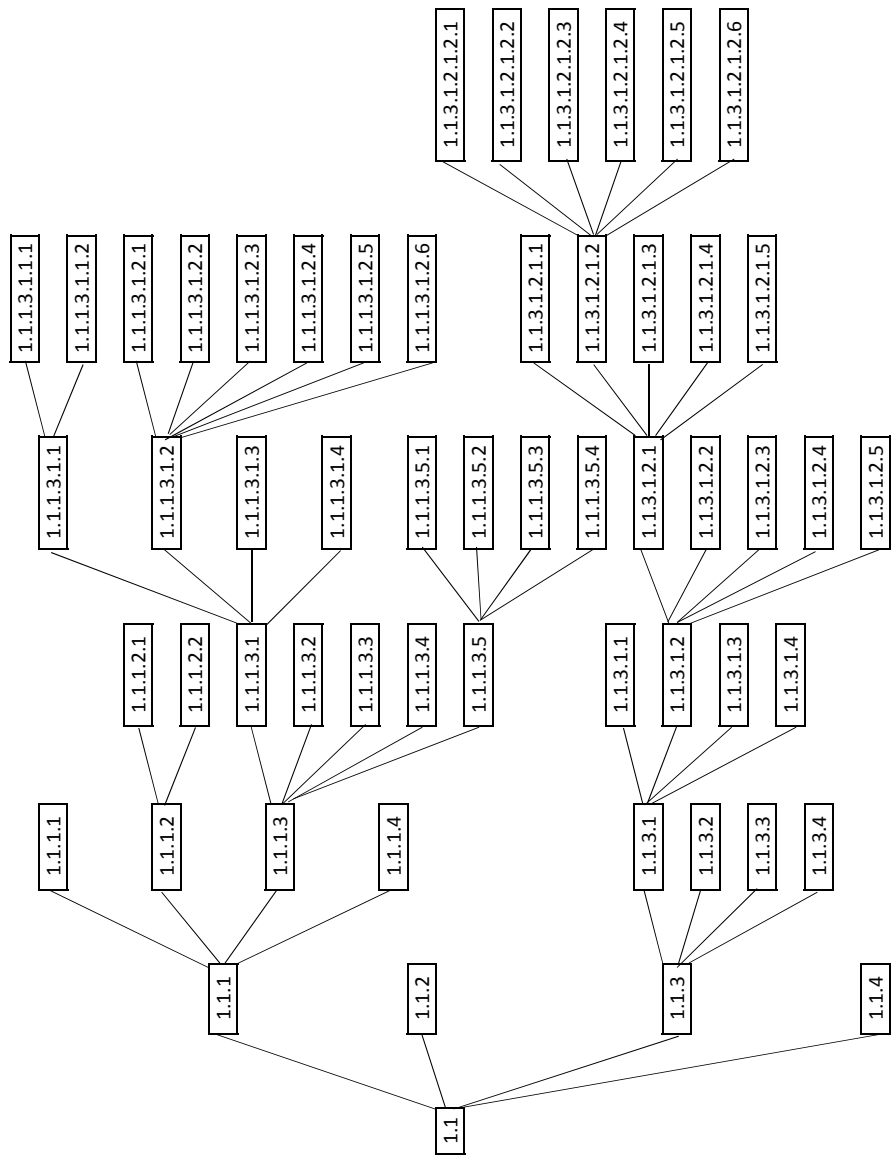
$$bf_6 = 0$$

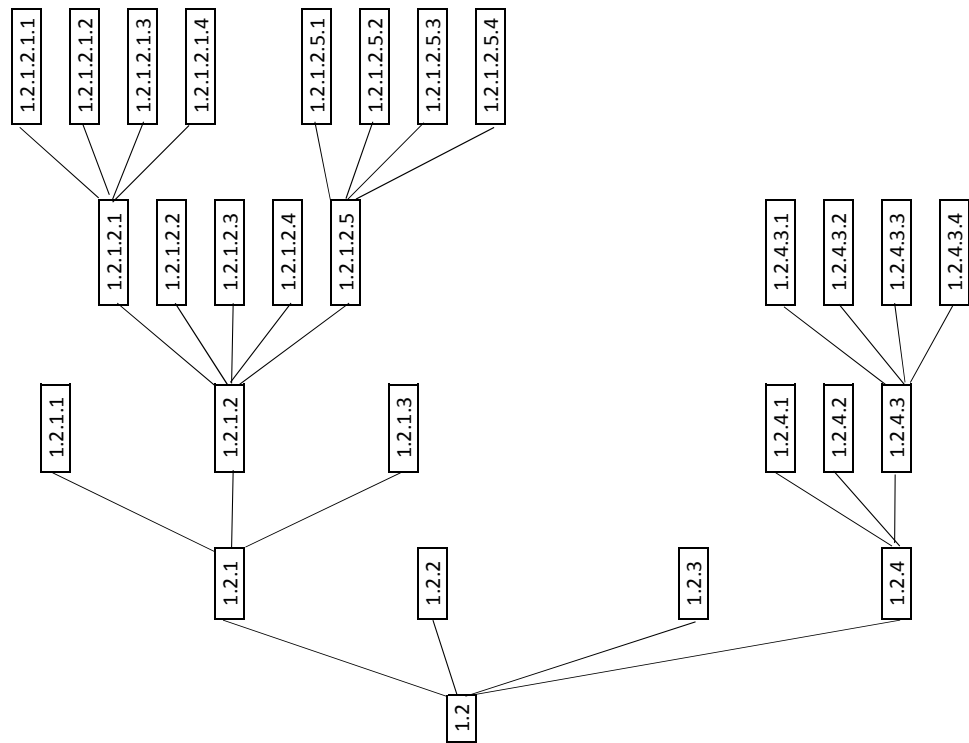
$$ag_6 = \frac{6c_{12}}{(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)(v-6)} [120c_{11}^5 - 120c_{11}^4(5(v-3) + c_{22}(v-1)) - (c_{22}+1)_5(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5) + 60c_{11}^3(2(85+c_{22}(15+c_{22})) - 3(5+c_{22})(8+c_{22})v + (c_{22}+4)_2v^2) - 20c_{11}^2(-6(225+c_{22}(85+c_{22}(15+c_{22}))) + (5+c_{22})(306+c_{22}(104+11c_{22})))v - 3(c_{22}+4)_2(9+2c_{22})v^2 + (c_{22}+3)_3v^3) + 5c_{11}(24(274+c_{22}(225+c_{22}(85+c_{22}(15+c_{22})))) - 2(5+c_{22})(1080+c_{22}(840+c_{22}(247+25c_{22}))))v + (c_{22}+4)_2(306+c_{22}(199+35c_{22}))v^2 - 2(c_{22}+3)_3(12+5c_{22})v^3 + (c_{22}+2)_4v^4]$$

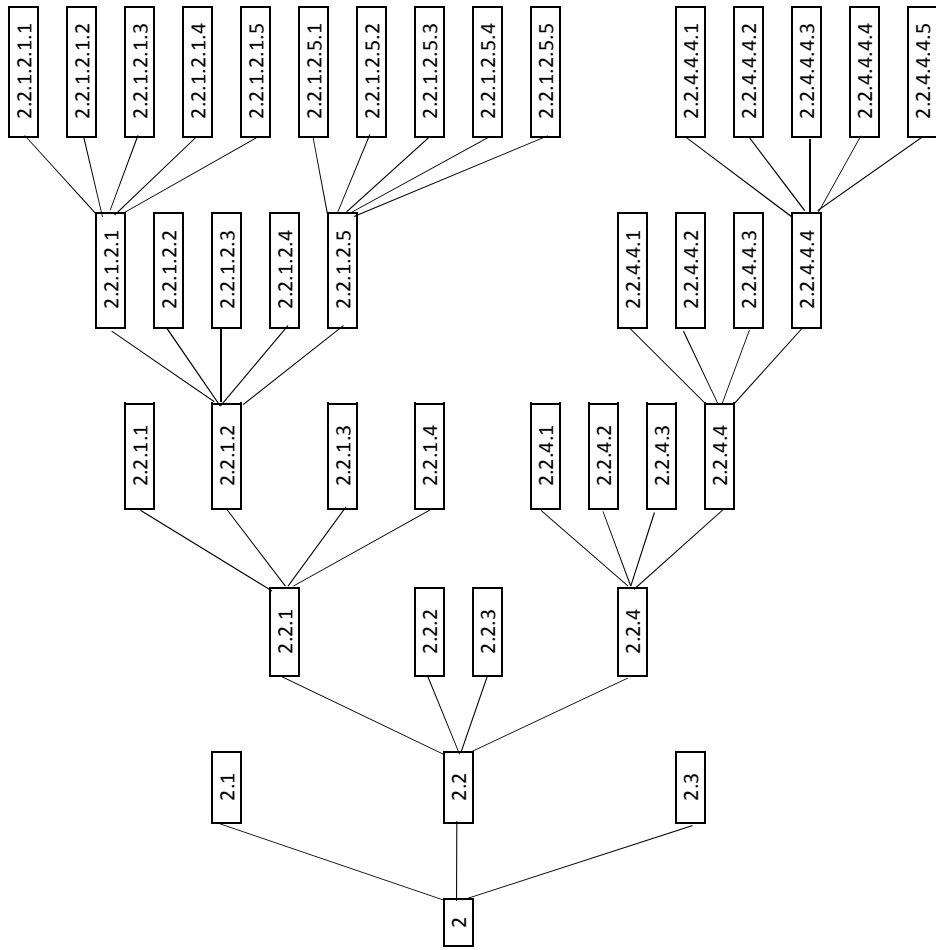
$$bg_6 = (c_{22})_6$$

con lo cual vemos que es igual al caso 1.1.3.1.2.1.2.1.

En las siguientes páginas se aprecian los diagramas que permiten visualizar el esquema que fue considerado en la resolución por casos, y de esta manera queda explícita la gran cantidad de procesos de cálculo necesarios para llegar a los resultados presentados.







Nomenclatura

$(a)_n$	Símbolo Pochhammer de a
$(M)_{ij}$	Elemento de la matriz M en la i -ésima fila y j -ésima columna
$-\mathbb{N}$	Números enteros negativos
$-\mathbb{N}_0$	Números enteros negativos y el 0
\bar{z}	Conjugado de un número complejo z
$\binom{n}{m}$	Número combinatorio
\emptyset	Conjunto vacío
$\Gamma(z)$	Función Gamma
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto interno
\mathbb{C}	Números complejos
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Matrices de dimensión $n \times m$ con coeficientes complejos
\mathbb{N}	Números naturales
\mathbb{N}_0	Números naturales y el 0
\mathbb{R}	Números reales
\mathbb{R}^+	Números reales positivos
\mathbb{Z}^*	Números enteros sin el 0
$B(x, y)$	Función Beta
$H_n(x)$	Polinomios de Hermite
I	Matriz identidad de dimensión 2
I_N	Matriz identidad de dimensión N
$L_n^\alpha(x)$	Polinomios de Laguerre
M^*	Matriz adjunta de M
$P_n^{\alpha, \beta}(x)$	Polinomios de Jacobi
$\arg(z)$	Argumento de un número complejo z
$\operatorname{Re}(z)$	Parte real de un número complejo z
$\operatorname{spec}(M)$	Espectro de la matriz M

Bibliografía

- [1] ABRAMOWITZ, M. y STEGUN, I. (1954). *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications, Inc.
- [2] BATEMAN, H. (1953). *Higher Transcendental Functions, Vol. 1 y Vol. 2*. Florida: Robert E. Krieger Publishing Company, Inc.
- [3] BEALS, R. y WONG, R. (2010). *Special Functions. A Graduate Text*. England: Cambridge University Press.
- [4] BEREZANS'KIĬ, Ju. (1968). *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17*. Rhode Island: American Mathematical Society.
- [5] BOCHNER, S. (1929) “Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme”, en *Math. Z.*, Vol. 29, No. 1, p. 730-736.
- [6] BORREGO, J., CASTRO, M., y DURÁN, A. (2012) “Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Differential Equations with Recurrence Coefficients having Non-scalar Limits” en *Integral Transforms Spec. Funct.*, Vol. 23, No. 9, p. 685-700.
- [7] BORWEIN, P. y ERDÉLYI, T. (1995). *Polynomials and Polynomial Inequalities*. New York: Springer-Verlag.
- [8] BROMWICH, T.(1908). *An Introduction to the Theory of Infinite Series*. Glasgow: University Press.
- [9] CANTERO, M., MORAL, L., y VELÁZQUEZ, L. (2007) “Matrix Orthogonal Polynomials whose Derivatives are also Orthogonal” en *J. Approx. Theory*, Vol. 146, p. 174-211.
- [10] CARATHEODORY, C. (1954). *Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. 2*. New York: Chelsea Publishing Company.
- [11] CASPER, W. (2016) “Elementary Examples of Solutions to Bochner’s Problem for Matrix Differential Operators” en *arXiv:1509.03674 [math.CA]*.
- [12] CASTRO, M. y GRÜNBAUM, F. (2005) “Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying First Order Differential Equations: a Collection of Instructive Examples” en *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol. 12, Supplement 2, p. 63-76.
- [13] CASTRO, M. y GRÜNBAUM, F. (2006) “The Algebra of Differential Operators Associated to a Family of Matrix-Valued Orthogonal Polynomials: Five Instructive Examples”, en *IMRN*, Vol. 2006, Article ID 47602, p. 1-33.
- [14] CASTRO, M. y GRÜNBAUM, F. (2008) “The Noncommutative Bispectral Problem for Operators of Order One”, en *Constr. Approx.*, Vol. 27, No. 3, p. 329-347.

- [15] CHIHARA, T. (1978). *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York: Gordon and Breach, Science Publishers, Inc.
- [16] COURANT, R y HILBERT, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*. New York: Interscience Publishers, Inc.
- [17] DANERI, E. y DURÁN, A. (2001) “Ratio Asymptotics for Orthogonal Matrix Polynomials with Unbounded Recurrence Coefficients”, en *J. Approx. Theory*, Vol. 110, No. 1, p. 1-17.
- [18] DANERI, E. y DURÁN, A. (2002) “Weak Convergence for Orthogonal Matrix Polynomials”, en *Indag. Mathem.*, Vol. 13, No. 1, p. 47-62.
- [19] DEFEZ, E. y DURÁN, A. (2002) “Orthogonal Matrix Polynomials and Quadrature Formulas”, en *Linear Algebra Appl.*, Vol. 345, No. 1-3, p. 71-84.
- [20] DURÁN, A. (1993) “A Generalization of Favard’s Theorem for Polynomials Satisfying a Recurrence Relation”, en *J. Approx. Theory*, Vol. 74, No. 1, p. 83-109.
- [21] DURÁN, A. (1995) “On Orthogonal Polynomials with Respect to Positive Definite Matrix of Measures”, en *Canad. J. Math.*, Vol. 47, No. 1, p. 88-112.
- [22] DURÁN, A. (1996) “Markow’s Theorem for Orthogonal Matrix Polynomials”, en *Canad. J. Math.*, Vol. 48, No. 6, p. 1180-1195.
- [23] DURÁN, A. (1997) “Matrix Inner Product having a Matrix Symmetric Second Order Differential Operator”, en *Rocky Mountain J. Math.*, Vol. 27, No. 2, p. 585-600.
- [24] DURÁN, A. (1999) “Ratio Asymptotics for Orthogonal Matrix Polynomials”, en *J. Approx. Theory*, Vol. 100, No. 2, p. 304-344.
- [25] DURÁN, A. (2009) “A Method to Find Weight Matrices having Symmetric Second Order Differential Operators with Matrix Leading Coefficient”, en *Constr. Approx.*, 29, p. 181-205.
- [26] DURÁN, A. (2009) “Generating Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Second Order Differential Equations from a trio of Triangular Matrices”, en *J. Approx. Theory* 161, p. 88-113.
- [27] DURÁN, A. (2010) “Rodrigues’ Formulas for Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Second-Order Differential Equations”, en *Internat. Math. Res. Notices*, Vol. 2010, No. 5, p. 824-855.
- [28] DURÁN, A. (2011) “A Miraculously Commuting Family of Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Second Order Differential Equations”, en *J. Approx. Theory*, 163, p. 1815-1833.
- [29] DURÁN, A. y GRÜNBAUM, F. (2004) “Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Second-Order Differential Equations”, en *IMRN*, Vol. 2004, No. 10, p. 461-484.
- [30] DURÁN, A. y GRÜNBAUM, F. (2005) “A Characterization for a Class of Weight Matrices with Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Second-Order Differential Equations”, en *International Math. Research Notices*, Vol. 2005, No. 23, p. 1371-1390.
- [31] DURÁN, A. y GRÜNBAUM, F. (2005) “A Survey on Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Second-Order Differential Equations”, en *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 178, No. 1-2, p. 169-190.
- [32] DURÁN, A. y GRÜNBAUM, F. (2005) “Orthogonal Matrix Polynomials, Scalar Type Rodrigues’ Formulas and Pearson Equations”, en *J. Approx. Theory.*, Vol. 134, No. 2, p. 267-280.

- [33] DURÁN, A. y GRÜNBAUM, F. (2005) “Structural Formulas for Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Second Order Differential Equations”, en *I. Constr. Approx.*, Vol. 22, p. 255-271.
- [34] DURÁN, A. y GRÜNBAUM, F. (2006) “P. A. M. Dirac meets M.G. Krein: Matrix Orthogonal Polynomials and Dirac’s Equation”, en *J. Phys. A.*, Vol. 39, No. 14, p. 3655-3662.
- [35] DURÁN, A. y GRÜNBAUM, F. (2007) “Matrix Orthogonal Polynomials Satisfying Second Order Differential Equations: Coping without help from Group Representation Theory”, en *J. Approx. Theory*, Vol. 148, p. 35-48.
- [36] DURÁN, A. y GRÜNBAUM, F. (2009) “Matrix Differential Equations and Scalar Polynomials Satisfying Higher Order Recursions”, en *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 354, No. 1, p. 1-11.
- [37] DURÁN, A. y DE LA IGLESIA, M. (2008) “Second-Order Differential Operators having Several Families of Orthogonal Matrix Polynomials as Eigenfuctions”, en *arXiv:0711.1763 [math.CA]*
- [38] DURÁN, A. y DE LA IGLESIA, M. (2008) “Some Examples of Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Odd Order Differential Equations”, en *J. Approx. Theory*, Vol. 150, No. 2, p. 153-174.
- [39] DURÁN, A. y LÓPEZ-RODRÍGUEZ, P. (1996) “Orthogonal Matrix Polynomials: Zeros and Blumenthal’s Theorem”, en *J. Approx. Theory*, Vol. 84, No. 1, p. 96-118.
- [40] DURÁN, A. y LÓPEZ-RODRÍGUEZ, P. (1997) “Density Questions for the Truncated Matrix Moment Problem”, en *Canad. J. Math.*, Vol. 49, No. 1, p. 708-721.
- [41] DURÁN, A. y LÓPEZ-RODRÍGUEZ, P. (1997) “The L^p Space of a Positive Definite Matrix of Measures and Density of Matrix Polynomials in L^1 ”, en *J. Approx. Theory*, Vol. 90, No. 2, p. 299-318.
- [42] DURÁN, A. y LÓPEZ-RODRÍGUEZ, P. (2000) “ N -extremal Matrices of Measures for an Indeterminate Matrix Moment Problem”, en *J. Funct. Anal.*, Vol. 174, No. 2, p. 301-321.
- [43] DURÁN, A., LÓPEZ-RODRÍGUEZ, P. y SAFF, E. (1999) “Zero Asymptotic Behaviour for Orthogonal Matrix Polynomials”, en *J. D’Analy. Math.*, Vol. 78, No. 1, p. 37-60.
- [44] DURÁN, A. y POLO, B. (2002) “Gaussian Quadrature Formulae for Matrix Weights”, en *Linear Algebra Appl.*, Vol. 355, No. 1-3, p. 119-146.
- [45] DURÁN, A. y SAFF, E. (2001) “Zero Location for Nonstandard Orthogonal Polynomials”, en *J. Approx. Theory*, Vol. 113, No. 1, p. 127-141.
- [46] DURÁN, A. y VAN ASSCHE, W. (1995) “Orthogonal Matrix Polynomials and Higher Order Recurrence Relations”, en *Linear Algebra Appl.*, Vol. 219, No. 1, p. 261-280.
- [47] EULER, L. (1769) *Opera Omnia Ser.1*, p. 11-13.
- [48] GAUSS, C. F. (1812) *Comm. Soc. Reg. Sci. II*, Vol. 3, p. 123-162.
- [49] GERONIMO, J. (1982) “Scattering Theory and Matrix Orthogonal Polynomials on the Real Line”, en *Circuits Systems Signal Process*, Vol. 1, No. 3-4, p. 471-495.
- [50] GRÜNBAUM, F. (2003) “Matrix Valued Jacobi Polynomials”, en *Bull. Sciences Math.*, Vol. 127, No. 3, p. 207-214.

- [51] GRÜNBAUM, F. y DE LA IGLESIA, M. (2007) “Matrix-valued Orthogonal Polynomials related to $SU(N+1)$, their Algebras of Differential Operators and the Corresponding Curves”, en *Experiment. Math.*, Vol. 16, No. 2, p. 189-207.
- [52] GRÜNBAUM, F. e ILIEV, P. (2003) “A Noncommutative Version of the Bispectral Problem”, en *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 161, p. 99-118.
- [53] GRÜNBAUM, F., PACHARONI, I. y TIRAO, J. (2002) “Matrix Valued Spherical Functions Associated to the Complex Projective Plane”, en *J. Functional Analysis*, Vol. 188, No. 2, p. 350-441.
- [54] GRÜNBAUM, F., PACHARONI, I. y TIRAO, J. (2003) “An Invitation to Matrix Valued Spherical Functions: Linearization of Products in the Case of the Complex Projective Space $P_2(\mathbb{C})$ ”, en *arXiv:math/0202304 [math.RT]*.
- [55] GRÜNBAUM, F., PACHARONI, I. y TIRAO, J. (2003) “Matrix Valued Orthogonal Polynomials of the Jacobi Type”, en *Indag. Mathem.*, Vol. 14, No. 3-4, p. 353-366.
- [56] GRÜNBAUM, F., PACHARONI, I. y TIRAO, J. (2005) “Matrix Valued Orthogonal Polynomials of the Jacobi Type: The Role of Group Representation Theory”, en *Ann. Inst. Fourier*, Vol. 55, No. 6, p. 2051-2068.
- [57] GRÜNBAUM, F. y TIRAO, J. (2007) “The Algebra of Differential Operators Associated to a Weight Matrix”, en *Integr. equ. oper. theory*, Vol. 58, Issue 4, p. 449-475.
- [58] KOELINK, E., VAN PRUIJSSEN, M. y ROMÁN, P. (2012) “Matrix-valued Orthogonal Polynomials related to $(SU(2) \times SU(2), \text{diag})$ ”, en *arXiv:1203.0041 [math.CA]*.
- [59] KREIN, M. (1949) “Fundamental Aspects of the Representation Theory of Hermitian Operators with Deficiency Index (m, m) ”, en *Ukrain. Mat. Z.*, Vol. 1, p. 3-66. English translation: *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, Vol. 97, p. 75-143.
- [60] KREIN, M. (1949) “Infinite J-Matrices and a Matrix Moment Problem”, en *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 69, p. 125-128.
- [61] KUMMER, E. E. (1836). *Über die hypergeometrische Reihe*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 15:39–83.
- [62] LOPES BRANQUINHO, A. y FOULQUIÉ MORENO, A. (2008). *Coimbra Lecture Notes on Orthogonal Polynomials*. New York: Nova Science Publishers, Inc.
- [63] LÓPEZ-RODRÍGUEZ, P. (1999) “Riesz’s Theorem for Orthogonal Matrix Polynomials”, en *Constr. Approx.*, Vol. 15, No. 1, p. 135-151.
- [64] LÓPEZ-RODRÍGUEZ, P. (2001) “The Nevanlinna Parametrization for a Matrix Moment Problem”, en *Math. Scand.*, Vol. 89, No. 2, p. 245-267.
- [65] MORSE, P. y FESHBACH, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*. New York-Toronto-London: Mc Graw-Hill.
- [66] NIKIFOROV, A. y UVAROV, V. (1988). *Special Functions of Mathematical Physics*. Moscow: M.V. Keldish Institute of Applied Mathematics of the Academy of Science of the USSR.
- [67] PACHARONI, I. y ROMÁN, P. (2008) “A Sequence of Matrix Valued Orthogonal Polynomials Associated to Spherical Functions”, en *Constr. Approx.*, Vol. 28, No. 2, p. 127-147.
- [68] PACHARONI, I. y TIRAO, J. (2007) “Matrix Valued Orthogonal Polynomials Arising from the Complex Projective Spaces” en *Constr. Approx.*, Vol. 25, No. 2, p. 177-192.

- [69] PACHARONI, I. y ZURRIÁN, I. (2014) “Matrix Ultraspherical Polynomials: The 2×2 Fundamental Cases”, en *arXiv:1309.6902[math.RT]*.
- [70] RIEMANN, B. (1857) *K. Gess. Wiss.*, Vol. 7, p. 1-24.
- [71] ROMÁN, P. y SIMONDI, S. (2010) “The Generalized Matrix Valued Hypergeometric Equation” en *International Journal of Mathematics*, Vol. 21, No. 2, p. 145-155.
- [72] ROMÁN, P. y TIRAO, J. (2006) “Spherical Functions, The Complex Hyperbolic Plane and the Hypergeometric Operator” en *International Journal of Mathematics*, Vol. 17, No. 10, p. 1151-1173.
- [73] SLATER, L. (1966). *Generalized Hypergeometric Functions*. London: Cambridge Univ. Press.
- [74] SINAP, A. y VAN ASSCHE, W. (1996) “Orthogonal Matrix Polynomials and Applications” en *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 66, No. 1-2, p. 27-52.
- [75] SRIVASTAVA, H. y MANOCHA, H. (1984). *A Treatise on Generating Functions*. England: Ellis Horwood Limited.
- [76] SZEGÖ, G. (1939). *Orthogonal Polynomials*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- [77] TIRAO, J. (2003) “The Matrix-Valued Hypergeometric Equation” en *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A*, Vol. 100, No. 14, p. 8138-8141.
- [78] TIRAO, J. y ZURRIÁN, I. (2014) “Spherical Functions of fundamental K-types associated with the n-dimensional sphere”, en *arXiv:1312.0909v4[math.RT]*.
- [79] TIRAO, J. y ZURRIÁN, I. (2016) “Reducibility of Matrix Weights”, en *arXiv:1501.04059 [math.RT]*.
- [80] VINET, L. y ZHEDANOV, A. (2011) “Representations of the Schrödinger Group and Matrix Orthogonal Polynomials”, en *J. Phys. A.*, Vol. 44, No. 35, 355201, 28.
- [81] WALLIS, J. (1656). *Arithmetica Infinitorum*.
- [82] WHITTAKER, E. y WATSON, G. (1920). *A Course of Modern Analysis*. England: Cambridge University Press.
- [83] YAKHLEF, H., MARCELLÁN, F. y PIÑAR, M. (2001) “Perturbations in the Nevai Class of Orthogonal Matrix Polynomials” en *Linear Algebra Appl.*, Vol. 336, No. 1-3, p. 231-254.
- [84] YAKHLEF, H., MARCELLÁN, F. y PIÑAR, M. (2001) “Relative Asymptotics for Orthogonal Matrix Polynomials with Convergent Recurrence Coefficients” en *J. Approx. Theory*, Vol. 111, No. 1, p. 1-30.