

# ECONOMIA DINAMICA. MODELOS CAOTICOS\*

**Andrés Alejandro Berruti**  
Jefe de Trabajos Prácticos  
Economía Internacional I

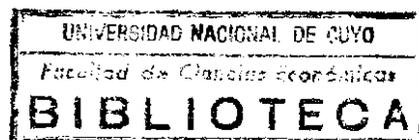
## I. Introducción

En las dos décadas pasadas, el mundo de la ciencia ha evolucionado fundamentalmente sobre un nuevo entendimiento de los fenómenos dinámicos. Es así como, en el campo de los descubrimientos matemáticos se ha revisado el concepto de la predictibilidad de los comportamientos dinámicos y se ha despertado un gran interés en el área de la dinámica caótica.

.....

\* El presente artículo ha sido merecedor de los siguientes premios: Primer Premio en el Concurso Nacional de Matemática y Estadística Aplicada a las Ciencias Económicas "Ing. Ricardo S. Carbajo 1995"; otorgado por la Asociación de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines y Primer Premio en el Concurso "El Cronista", categoría economía, edición 1995; otorgado por el diario El Cronista.

Quiero agradecer a la Dra. Virginia Vera de Serio, quien con su conocimiento enriqueció este trabajo. También quiero expresar mi gratitud al profesor Juan Verstraete por sus sugerencias y datos aportados, como asimismo a mi hermano Germán por su aporte y asesoramiento en la realización de los programas en lenguaje "C" para el cálculo de los distintos tests estadísticos. Cualquier error es, por supuesto, de mi responsabilidad.



A lo largo de la historia se han llevado a cabo descubrimientos importantes. El primer reconocimiento fue atribuido a Henri Poincaré (matemático francés) cuyo trabajo sobre la estabilidad del sistema solar en 1890 ayudó a descubrir el estudio de los sistemas dinámicos. Después de los trabajos de Poincaré y G. D. Birkoff a principios de este siglo y a pesar del continuo interés de la Unión Soviética sobre el fenómeno caótico, los sistemas dinámicos cayeron en una relativa obscuridad. Durante este período había una tendencia entre los matemáticos, científicos e ingenieros a pensar que los sistemas no lineales eran susceptibles de comportamientos erráticos. Entre los años 1960 y 1970 hubo una conmoción en la actividad de sistemas dinámicos tanto por matemáticos como por científicos de otras áreas. En este momento se comienza a profundizar su estudio en distintas áreas: Stephen Smale (matemática), Edward Lorenz (meteorología), Robert May (biología), Mitchell Feigenbaum (física), etc.

¿Cuál es el rol del caos en la teoría y cuáles son sus aplicaciones a la forma de pensar de nuestro mundo? Una respuesta posible es que es un fenómeno que puede ocurrir en modelos económicos, físicos, biológicos, etc., y debemos al menos tratar de considerar si afectan en algún modo nuestros análisis teóricos y empíricos. Otra respuesta es dar ejemplos de sus usos y luego juzgar los méritos de su aplicación. En la ciencia física ha habido un renovado interés en la teoría del flujo de los fluidos turbulentos que ha sido descubierto a través de pruebas de dinámica caótica. Esto ha llevado a una reconsideración de estos modelos (particularmente la simplificación de los supuestos del modelo) lo cual ha llevado a un entendimiento marcadamente superior del fenómeno turbulento. En las ciencias de la computación hay un gran interés en las propiedades que tienen los generadores de números aleatorios. Esto es básicamente porque se puede decir que el caos determinístico ocupa un lugar entre el campo de lo puramente aleatorio y lo expresamente determinístico. Es decir en la medida que se conozca qué parte no es aleatoria se juzga si una secuencia es o no aleatoria. En los test de hipótesis estadística ciertos estimadores que se usan para detectar dinámica caótica han sido usados para probar estacionariedad estocástica e independencia. Curiosamente estos tests tiene alto poder contra una amplia clase de alternativas estadísticas.

En modelos de dinámica económica los dos resultados principales han sido que el caos puede ocurrir en modelos de superposición generacional y en modelos económicos de crecimiento optimal. Ante esto muchos economistas se hallan un poco escépticos, ya que consideran que se debe llevar a

cabo una mayor cantidad de desarrollo sobre el tema antes de poder juzgar los méritos de analizar el fenómeno de la dinámica económica desde el punto de vista de la teoría del caos. Los modelos de equilibrio en la dinámica económica pueden ser un área fértil para nuevas investigaciones sobre los efectos que tiene el caos en la economía. Es por ello que el propósito de este trabajo es contribuir en alguna medida a establecer los alcances que el caos tiene en la economía. Para ello no sólo se han expuesto modelos teóricos, sino que se han analizado datos reales.

## II. Evidencias de caos en economía

El descubrimiento de comportamientos extraños de los sistemas dinámicos no lineales es uno de los mayores pasos que han dado las ciencias naturales; sin embargo, en la teoría económica esta dinámica no ha tenido gran impacto aún.

Algunos grupos de investigadores han tomado otra visión sobre el tema, de tal forma que han comenzado a observar las distintas fluctuaciones económicas bajo la hipótesis de que una porción relevante de éstas puede ser explicadas como un fenómeno *determinístico* endógenamente creado por la intersección de las distintas fuerzas del mercado, preferencias y tecnología.

Siguiendo a Michele Boldrin (1990) este tipo de programas de investigación involucra tres tipos de preguntas:

- Encontrar modelos teóricos que predigan los ciclos y el caos como un resultado lógico propio de un mecanismo económico razonable.
- Analizar los datos disponibles con el objeto de encontrar evidencias de no linealidad reafirmando procesos dinámicos.
- Comparar los datos y las predicciones de los modelos teóricos con el objeto de comprender si son al menos compatibles.

### A. La no linealidad en los modelos económicos

Recientemente ha habido mucho interés en modelos económicos no lineales que generan trayectorias altamente irregulares. El aumento en las capacidades computacionales en la década pasada ha conducido a un incremento en el interés en los sistemas dinámicos no lineales ya que el

comportamiento de éstos es diferente al de una dinámica lineal. "La característica principal de la no linealidad es precisamente que el mismo modelo puede conducir hacia resultados cualitativamente diferentes en la respuesta para cambios cualitativos en parámetros"<sup>1</sup>.

Postulando la no linealidad en un modelo estamos diciendo que la porción de la realidad bajo análisis es mejor reflejada, ya que estamos asumiendo la no existencia de una respuesta uniforme ante cambios en la(s) variable(s) independiente(s).

Dice Víctor A. Beker (1994) que la linealidad es una especie de razonamiento precolombino: ya que en aquel momento se decía que si se viajara hacia el Oeste nunca se podría alcanzar el Este. Es decir que el tamaño y la dirección en la respuesta a iguales cambios en la(s) variable(s) exógena(s) es siempre el mismo.

Con esto lo que se quiere decir es que no habría casi diferencia si habláramos de un análisis local. Pero si el análisis se realiza para cambios grandes obligatoriamente deberíamos estar en el campo de la no linealidad.

La no linealidad implica que un cambio en el valor de un parámetro puede conducir al modelo a un nuevo punto de equilibrio, en el cual el análisis de estática comparativa se mantiene pero según sea el caso se podría encontrar: un punto de bifurcación, el ciclo límite, un mapa caótico, etc.

Finalmente queda aún una pregunta pendiente para encontrar la relación exacta entre cambio y determinismo. El caos determinístico aparece como el nexo entre lo puramente estocástico y el determinismo puro. Pero lo que está fuera de cuestionamiento es que la no linealidad provee una herramienta poderosa para el desarrollo de análisis alejados del equilibrio en los sistemas económicos y las leyes que gobiernan el movimiento de su evolución.

## **B. Investigaciones previas**

Encontrar evidencias de caos en los datos económicos resulta un trabajo difícil básicamente por dos razones:

---

<sup>1</sup> BEKER, Víctor A., *Economic Nonequilibrium, Instability and Chaos*, en XXIX Reunión anual de la Asociación Argentina de Economía Política, FCE-Universidad Nacional de La Plata, Tomo 2 (La Plata, 1994), págs 269/270.

- El nivel alto de ruido o espurias que existen en la mayoría de los datos económicos agregados.
- La pequeñez relativa del tamaño de las muestras disponibles en los datos económicos.

Los algoritmos más utilizados en la detección de caos, el test exponencial de Liapouov y el test Granssberger-Procaccia, son originariamente usados para datos experimentales. Es decir, este tipo de test funciona mejor en las ciencias naturales ya que son éstas quienes pueden generar muestras grandes y de buena calidad en los laboratorios de experimentación.

Desgraciadamente los economistas han encontrado que la aplicación de estos métodos son un tanto difíciles de llevar a cabo en los datos económicos. Sin embargo, han habido casos publicados en los cuales se ha podido detectar satisfactoriamente el caos. Entre ellos podemos citar a algunas de las primeras investigaciones que produjeron estos resultados: Chen (1987), también Barnett y Chen (1988) y además Barnett y Hinch (1992) quienes proveyeron de una ayuda para detectar caos.

En estos trabajos se ha detectado que el sector financiero es uno de los posibles candidatos en el área económica para encontrar evidencias de caos. De esta forma Barnett y Hinch (1992) encontraron evidencias fuertes de no linealidad en la variable M1, mientras que para Barnett y Chen (1988) la evidencia más fuerte de caos estuvo tanto en M2 como en M3<sup>2</sup>. Finalmente no importa cuán marcada es la no linealidad ya que es una condición necesaria pero no suficiente para la existencia de caos. Es decir, un sistema no lineal puede no tener comportamiento caótico.

### **C. Un mercado relevante: El mercado de capitales**

El mercado de capitales es una de las partes de la economía en donde los modelos de caos son más factibles de aplicar. Algunos trabajos como el de Luca Luigi Ghezzi (1992) sobre bifurcaciones en el mercado de capitales es un claro ejemplo de las posibilidades de la no linealidad en el modelo. Este

<sup>2</sup> Donde: M1=Efectivo+Depósitos a la vista+Otras cuentas en cheques+Cheques de viajeros, M2=M1+Ahorros y depósitos a plazo de pequeña denominación+Acuerdos de recompra día a día en bancos comerciales+Eurodólares día a día+Saldos en fondos mutuos+Cuentas de depósito y M3=M2+Depósitos a término de grandes denominaciones emitidos por todas las instituciones financieras+Acuerdos de recompra a plazo en bancos comerciales y asociaciones de ahorro y préstamo+Saldo en fondos mutuos (solamente institucionales).

trabajo gira básicamente sobre un modelo no lineal con una ecuación diferencial de segundo orden: en donde el comportamiento asintótico ha probado ser fuertemente influenciado por los parámetros ingresados y a su vez modificado por las políticas de realimentación de los agentes del modelo (traders). Pero a pesar de toda la complicación del modelo, está diseñado de tal forma que capta los rasgos salientes de un mercado de valores.

En realidad estudios empíricos sugieren que los precios de este mercado pueden tener comportamiento complejo, con un posible componente de caos determinístico.

#### **D. Modelos de crecimiento**

Boldrin y Montrucchio (1986) mostraron un modelo general de crecimiento en donde la política óptima podría ser de tal forma que la dinámica del sistema sería caótica. Resultados anteriores desarrollados por Majumdar y Mitra (1982) y Dechert y Nishimura (1983) habían mostrado que relajando la hipótesis de una tecnología convexa se llegaba a que la propiedad de estabilidad global de un sector de crecimiento no se mantenía. Sin embargo la secuencia del mercado de capitales fue mostrada para que sea monótona y por eso el caos no surge en esta clase de modelo.

En un modelo de crecimiento más general, Benhabib y Nishimura (1985) y Deneckere y Pelikan (1986) mostraron que el comportamiento periódico fue consistente con un crecimiento óptimo. La sorpresa de los resultados de Boldrin y Montrucchio es que ellos mostraron que el caos es posible en modelos de crecimiento óptimos tanto con distintas tecnologías como con preferencias convexas.

#### **E. Modelos de superposición generacional**

Las versiones simplificadas y en algunos casos modelos estándares de superposición generacional (overlapping generations models) pueden fácilmente generar situaciones caóticas. Como es el caso de los resultados obtenidos por Benhabib y Day (1981, 1982), estudiados por Grandmont (1985).

El trabajo de Grandmont contiene una teoría del caos aplicada al bienestar. Utiliza esta técnica para determinar condiciones suficientes de gustos y tecnologías obteniendo así un recorrido de caos determinístico en un modelo de superposición generacional con expectativas racionales. Básicamente el

trabajo se basa en cuestionar a los modelos macroeconómicos neoclásicos convencionales, que argumentan que la macroeconomía es asintóticamente estable a lo largo de una tendencia y en ausencia de shocks estocásticos exógenos. Es decir que no se necesita introducir lo que Grandmont llama shocks exógenos ad hoc, con el fin de obtener fluctuaciones en el equilibrio semejantes a las del ciclo de negocios. A contrario sensu, lo que se propone es una variación de la curva de oferta en el diagrama de Gale (1973), para mostrar la dinámica de un conjunto de equilibrios en estos modelos (superposición generacional) bajo expectativas racionales consistentes en dos períodos idénticos de vida de los agentes económicos. En definitiva, lo que se demuestra es que este tipo de modelos está determinado por generadores caóticos más que por generadores estocásticos.

#### F. Otras evidencias de caos

Otras evidencias posibles es el caso de algunos modelos macroeconómicos, que si bien no presentan un alto contenido de caos determinístico en el análisis de sus datos, es debido básicamente a los problemas con los datos antes mencionados.

Algunos trabajos sobre el mercado agrícola han demostrado la posibilidad de existencia de una dinámica caótica, especialmente los modelos de telaraña, como es el caso de los trabajos de Hommes (1992 y 1994).

Hace unos años fue demostrado por Artstein (1983) y Jensen y Urban (1984) que en el modelo tradicional de la telaraña puede ocurrir un comportamiento caótico en precios si por lo menos una de las curvas, ya sea de oferta o demanda, es no monótona. También Chiarella (1988) usó una curva de oferta no lineal con un solo punto de inflexión en este mismo contexto con el objeto de hacer posible la presencia de un comportamiento caótico.

En el trabajo de Finkenstädt y Kubbier (1992) de la Universidad de Berlín se presenta un modelo agrícola con una oferta lineal y una demanda hiperbólica. Se observa que a través de la introducción de expectativas adaptativas el mecanismo de ajustes en precios puede generar, de acuerdo a los valores de los parámetros, una variada gama de dinámicas de comportamiento, incluyendo entre ellos la posibilidad de caos. Si bien el desarrollo del análisis empírico dio como resultado la inexistencia de no linealidad determinística, este trabajo deja varios interrogantes abiertos para investigaciones futuras.

## G. Determinantes más sobresalientes de dinámica caótica en economía

Algunos de los posibles canales en que pueden aparecer dinámicas de equilibrio complejo en los modelos son:

- Introducir familias que descuenten fuertemente el futuro y que hagan que su participación sea grande en relación con el resto de la economía.
- Permitir que los agentes sean fijadores de precios y no tomadores de los mismos como generalmente se supone.
- Introducir retornos crecientes y externalidades. Varios economistas creen que los crecimientos y decrecimientos de las ciudades se deben explicar por efectos de catálisis externa.
- Abandonar el supuesto de mercados completos.
- Imponer dinámicas complejas o caóticas directamente en las preferencias y la tecnología.
- Abandonar el supuesto de equilibrio.
- Permitir que las acciones de algunos agentes tengan efectos directos sobre los gustos y tecnología de los otros. Es decir, la existencia de externalidades como se definen en Arrow y Hahn (1971), permitirá la presencia de una dinámica compleja, donde la difusión de la moda o la tecnología se transmite a los precios y a las cantidades a través del proceso de equilibrio.
- Introducir funciones exógenas forzadas. Introducir rezagos en el consumo y la tecnología. Sin embargo, es sabido que los rezagos se unen con la inestabilidad y el caos a través del tipo de problema de demora para construir. Esto hace que el incentivo para realizar las inversiones de los agentes económicos no sea igual para todos; por lo que las mismas se van a dar en distintos momentos. En definitiva, la consecuencia es que las medidas de los efectos agregados macroeconómicos se van a ver alisados.

## III. Un modelo teórico

En este inciso se analizará el comportamiento dinámico de un modelo económico constituido por un sistema de tres ecuaciones. Una primera, destinada al mercado demandante, en el cual se reflejan las conductas de los consumidores, de acuerdo a las particularidades de los mismos y las situaciones reinantes en el mercado, ante cualquier cambio en precios. Luego una segun-

da ecuación, de oferta, en la cual se pone de manifiesto el sector productor. Esta función dependerá, al igual que la otra, de las características propias del producto que se esté investigando. Finalmente el modelo se complementará con una ecuación de expectativas en donde los productores realizan una predicción del precio desde un período a otro.

### A. El modelo de la telaraña

Este modelo permite comprender los mercados de productos estacionales. Es uno de los modelos más simples y útiles en economía, en el cual se describe el comportamiento de los precios para un mercado de un bien determinado. En este trabajo se va a investigar la dinámica del modelo no lineal de la telaraña que incluye expectativas. Es decir que dadas las siguientes ecuaciones:

$$q_t^d = D(P_t) \quad (1)$$

$$q_t^s = S(P_t^*) \quad (2)$$

$$q_t^d = q_t^s \quad (3)$$

$$P_t^* = (1 - w)P_{t-1}^* + wP_{t-1} \quad (\text{expectativas adaptativas}) \quad (4)$$

$$P_t^* = (1 - w)P^e + wP_{t-1} \quad (\text{expectativas normales}) \quad (5)$$

podemos representar a una economía de un solo bien.

La primera ecuación nos dice que la demanda del bien  $q$  en el momento  $t$ , es una función del precio corriente  $P_t$ . Por otro lado, la ecuación (2) dice que la oferta de bienes  $q$  en el momento  $t$  es una función del precio esperado  $P_t^*$  para el período  $t$ .

En la ecuación (3) se está suponiendo que el mercado se vacía, es decir que la oferta es igual a la demanda para cada período  $t$ . Finalmente, las ecuaciones (4) o (5) describen el mecanismo que tienen los productores para formar sus expectativas; es decir si los productores tienen expectativas adaptativas sobre el precio (ecuación (4)) el mecanismo será el siguiente: si el precio actual  $P_{t-1}$  es mayor (menor) que el anterior esperado  $P_{t-1}^*$ , luego el nuevo precio esperado  $P_t^*$  es mayor (menor). En este caso el nuevo precio esperado es un promedio ponderado entre el precio esperado anterior y el precio real del período anterior<sup>3</sup>; siendo el parámetro  $w$  el factor de peso en las expectativas.

<sup>3</sup>. Notar que estas expectativas no son otra cosa que un promedio ponderado de todos los precios pasados.

Si  $w$  es igual a la unidad, la ecuación (4) queda reducida a la expresión  $P_t^* = P_{t-1}$ , siendo las expectativas en el precio igual al período anterior. Este tipo de expectativas son llamadas estáticas o ingenuas<sup>1</sup> y fue usada en la versión original del modelo de la telaraña (modelo tradicional de la telaraña.).

Si no se toman las expectativas adaptativas como válidas, se puede suponer el precio esperado como un promedio ponderado (ecuación (5)); siendo nuevamente  $w$  el factor de ponderación, entre el precio de equilibrio  $P^*$  y el precio del período anterior  $P_{t-1}$ . El problema que reviste este tipo de expectativas es que los agentes económicos deben conocer cuál es el precio de equilibrio en el mercado. Este tipo de expectativas hace que la convergencia (en caso que la haya) sea más rápida. Nuevamente si suponemos que  $w=1$ , nuestras expectativas quedarían reducidas a las expectativas estáticas.

Cuando en el modelo aparecen precios rezagados en el tiempo como argumentos de las funciones debemos aplicar la teoría del "no equilibrio". Para determinar si el modelo converge al equilibrio debemos establecer la relación que existe entre las elasticidades de las curvas tanto de oferta como de demanda por el producto.

Si los productores fijan los precios sólo considerando el período anterior, podemos tener tres tipos de situaciones:

- Elasticidad de demanda mayor que la elasticidad de oferta; con lo que los precios y cantidades convergerán hacia un equilibrio.
- Una demanda relativamente inelástica y una oferta más bien elástica. Como resultado se obtendrá un comportamiento oscilante explosivo en los precios.
- Si ambas curvas, oferta y demanda, tienen las mismas elasticidades (en valor absoluto) ocurrirá que los precios oscilarán perpetuamente en forma regular alrededor del nivel de equilibrio.

## **B. Un Modelo para un mercado agrícola**

### **1. Descripción del modelo**

Siguiendo a Fienkenstädt y Kuhbier (1992), consideremos una economía de un solo bien en donde hay un rezago entre la iniciación de la pro-

<sup>1</sup> La palabra ingenuas representa el hecho de que las personas siempre cometen los mismos errores. Es decir, no pueden darse cuenta de la situación.

ducción y la finalización cuando los bienes estén disponibles para su consumo. En este caso podemos pensar en bienes agrícolas, agropecuarios, etc. Es decir, no importa el bien en si ya que puede ser cualquiera; sólo es cuestión de definir las unidades de tiempo (si por ejemplo el cultivo es anual entonces  $t$  está midiendo un año; si en cambio fuera ganado en que su tiempo de gestación, crianza y engorde es de aproximadamente tres años,  $t$  representaría un período de tres años).

Suponemos que las decisiones de producción se hacen en cada período basadas en las expectativas de precios de este período ( $P_t^*$ ) mientras que los consumidores llevan a cabo su comportamiento de acuerdo al precio del momento o precio actual ( $P_t$ ).

Además, la cantidad producida en un determinado período es la única cantidad disponible en el período siguiente. Es decir, que estamos afirmando que no existe acumulación o almacenamiento de bienes.

Finalmente, asumamos que las funciones de oferta y de demanda son de la siguiente forma (ver Figura N° 1):

$$S(P_t^*) = a + b \cdot P_t^* \quad \text{para } P_t^* > \max(0, \frac{-a}{b}); \quad b > 0. \quad (6)$$

$$D(P_t) = \frac{c}{P_t} \quad \text{para } P_t > 0; \quad c > 0. \quad (7)$$

Como anteriormente dijimos, se cumple la condición de vaciamiento del mercado:

$$S(P_t^*) = D(P_t). \quad (8)$$

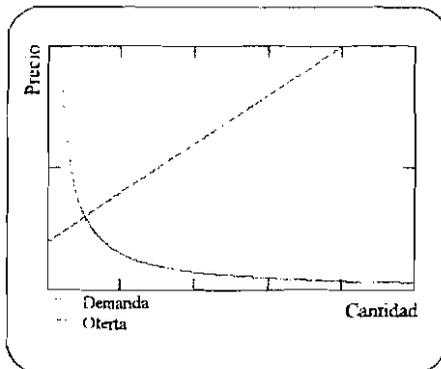


Figura N° 1

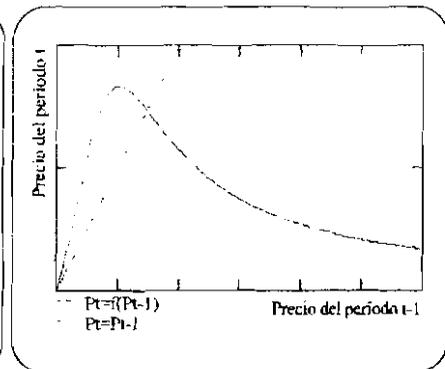


Figura N° 2

El sistema se completa con la ecuación que representa las expectativas que los productores tienen sobre el precio futuro. Comencemos suponiendo que éstos se identifican mejor con las expectativas adaptativas.

$$P_t^* = (1-w) \cdot P_{t-1}^* + w \cdot P_{t-1}, \text{ con } 0 < w < 1, \quad (9)$$

donde  $w$  es el coeficiente de expectativa. Reemplazando (6) y (7) en (8) obtenemos que:

$$a + b \cdot P_t^* = \frac{c}{P_t} \quad (10)$$

De (6), despejando  $P_t^*$ , tanto en el período  $t$  como en el anterior:

$$P_t^* = \frac{S(P_t^*) - a}{b} \quad \text{y} \quad P_{t-1}^* = \frac{S(P_{t-1}^*) - a}{b} \quad (11)$$

Reemplazamos (11) en (9) sabiendo que se cumple (8) para todo  $t$ , y despejando se llega a:

$$P_t = \frac{c \cdot P_{t-1}}{(1-w) \cdot c + a \cdot w \cdot P_{t-1} + w \cdot b \cdot P_{t-1}^2} \quad (12)$$

En definitiva se ha obtenido una ecuación en diferencia de primer orden en los precios, cuya gráfica se muestra en la Figura N° 2. En el diagrama de fase se puede apreciar que la figura tiene una especie de "joroba" que en general es característica en los modelos no lineales.

## 2. Comportamiento

Para satisfacer la condición económica de que los precios son positivos, se debe cumplir que el denominador de (12) es positivo ya que  $c > 0$ . De esto podemos decir que:

$$(1-w)c + awP_{t-1} + wbP_{t-1}^2 > 0 \quad (13)$$

$$P_{t-1} = \frac{-wa \pm \sqrt{w^2 a^2 - 4wb(1-w)c}}{2wb} \quad (14)$$

donde el discriminante debe ser negativo,

$$w[wa^2 - 4bc(1-w)] < 0, \quad (15)$$

$$\text{en definitiva: } \frac{w}{1-w} < \frac{4bc}{a^2}. \quad (16)$$

Es decir, (16) representa la condición de no negatividad en los precios.

Se puede ver en la figura anterior que la ecuación (12) tiene un único máximo en:

$$P_{\max} = \sqrt{\frac{1-w}{w} \cdot \frac{c}{b}}, \quad (17)$$

y tres puntos fijos. Para obtener éstos se buscan los puntos de la función donde se cumple que  $P_t = P_{t-1}$ :

$$P_t = \frac{c \cdot P_t}{(1-w) \cdot c + a \cdot w \cdot P_t + w \cdot b \cdot P_t^2}. \quad (18)$$

$$\tilde{P}_{1,2} = \frac{-a}{2 \cdot b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} + c}. \quad (19)$$

De esta forma se han obtenido tres puntos: uno para valores de precios negativos, por lo que no es relevante en el análisis económico, un segundo punto que es la solución trivial  $P_t=0$  y el tercero para valores positivos. Este último es el que vamos a utilizar de ahora en adelante para analizar el comportamiento. La existencia de estabilidad en el equilibrio va a depender finalmente de la pendiente de (12) evaluada en el punto fijo,

$$\frac{\partial P_t}{\partial P_{t-1}} = \frac{c^2 \cdot (1-w) - wbcP_{t-1}^2}{[(1-w)c + awP_{t-1} + wbP_{t-1}^2]^2}. \quad (20)$$

Si (20) es menor que la unidad en valor absoluto, podemos decir que el punto fijo es un único equilibrio estable, al cual van a converger todos los puntos que comiencen en cualquier órbita. Este tipo de movimiento puede ser oscilatorio o monótono pero siempre es convergente. En otras palabras lo que se quiere decir es que los movimientos que se producen en el mercado tienden siempre al equilibrio.

Este tipo de razonamiento no es en general coherente con lo que sucede en los mercados en la realidad; de hecho empíricamente comprobamos que los precios fluctúan sin estabilizarse en el equilibrio. Es por eso que resulta más interesante abandonar el caso de estabilidad del sistema y analizar

con mayor profundidad el caso en que la pendiente es mayor que la unidad en valor absoluto. Luego, el punto fijo  $\bar{P}$  es inestable si se cumple que:

$$\frac{\partial P_t}{\partial P_{t-1}} = f'(\bar{P}) < -1. \tag{21}$$

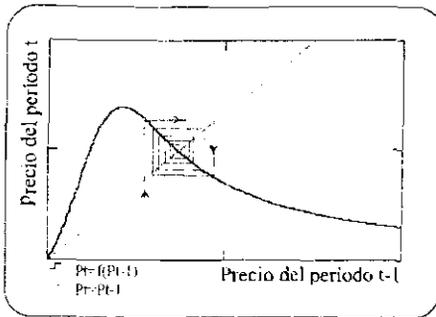


Figura N° 3

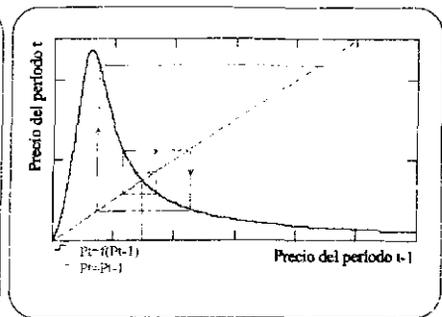


Figura N° 4

En la Figura N° 4 se muestra a la relación entre precio de período  $t$  y el del período anterior, en donde se cumple el último caso.

Si bien en este caso la función  $f$  tiene un único punto fijo, sus iteraciones tienen varios puntos fijos. Componiendo la función  $n$  veces:

$$\begin{aligned} \hat{P} \text{ es punto fijo de } f &\Rightarrow \hat{P} \text{ es punto fijo de } f^k, \forall k \geq 1. \\ \bar{P} \text{ es punto fijo de } f^n &\Rightarrow \bar{P} \text{ es punto fijo de } (f^n)^k = f^{nk}, \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

donde  $f^2 = f \circ f$ ,  $f^3 = f \circ f \circ f$  y en general  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ . Es decir, que con cada punto fijo se asocia un punto de equilibrio; en el cual  $f^2, f^3, \dots, f^n$  representan ciclos de período 2, 3, ...,  $n$ . En la Figura N° 5 se representan ejemplos de equilibrios de período 2 (parte superior) y de período 4 (parte inferior), en el que se observan que la dinámica es oscilante perpetua.

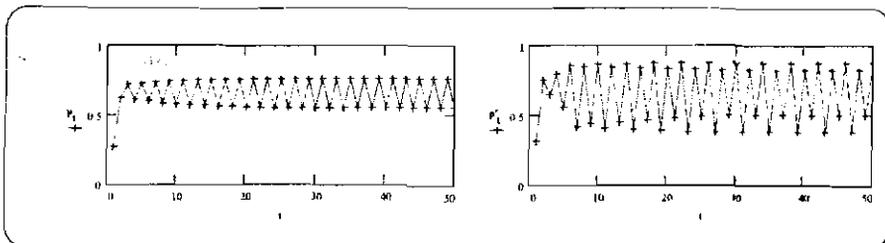


Figura N° 5

### 3. Un ejemplo numérico

Para analizar el comportamiento dinámico veamos el siguiente ejemplo numérico. Dados los valores de los parámetros:  $a=-2$ ;  $b=1$ ;  $c=3$ ;  $w=0,4$ , reemplazando en la ecuación (12) se obtiene la siguiente expresión:

$$P_t = f(P_{t-1}) = \frac{3 \cdot P_{t-1}}{3(1-0,4) - 8 \cdot P_{t-1} + 0,4 \cdot P_{t-1}^2}. \quad (22)$$

Luego, se determina el punto máximo,  $P_{\max} = \sqrt{4,5} \cong 2,121320\dots$ , y el punto fijo,  $\bar{P} = 1 + \sqrt{4} = 3$ . Este es el único punto de equilibrio estable en la dinámica del mercado, hasta que ocurra la bifurcación en  $w_1=0,5$ . Finalmente, de (16) obtenemos  $w_n$ :

$$w_n < \frac{1}{1 + \frac{a^2}{4bc}} = 0,75.$$

Recordemos que: el cociente  $a/b$  está relacionado con la ordenada al origen de la curva de oferta,  $1/b$  lo está con la pendiente de la misma curva y  $c$  se asocia con traslaciones de la curva de demanda. Por último, el parámetro  $w$  nos indica el grado de la expectativa que tienen los productores. Tomemos como variable el parámetro  $w$ .

Sabemos que la primera bifurcación se produce cuando:  $f'(\bar{P}) = -1$ ; de esa forma calculamos el valor de  $w_1=0,5$ .

Para  $w > 0,5$  la rama estable pierde estabilidad y surge un ciclo de período dos en  $\bar{P}_1$  y  $\bar{P}_2$ . Dado que los ciclos aparecen cada 2 periodos,  $\bar{P}_1$  y  $\bar{P}_2$ , deben ser puntos fijos de la segunda iteración  $f(f(P_{t-1}))$ , más conocida con la notación  $f^2(P_{t-1})$ . En la figuras siguientes se muestra la segunda iteración para distintos valores de  $w$ .

Se puede observar en la Figura N° 6 que la gráfica de la curva de segunda iteración presenta dos "jorobas"; de tal forma que para  $w < w_1$  existen dos puntos fijos, uno en  $\bar{P}$  y el otro en cero. Estos puntos fijos son los mismos que los de la primera iteración, por lo que sólo el punto  $\bar{P}$  es estable para el mapa  $f(P_{t-1})$  y para el resto de las iteraciones. Esto es debido a que la pendiente de la función  $f$  en  $\bar{P}$  es menor que la unidad en valor absoluto y por la regla de la cadena de la diferenciación, esto también es válido para todas las iteraciones de  $f$ .

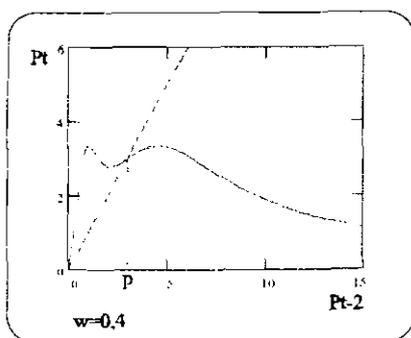


Figura N° 6

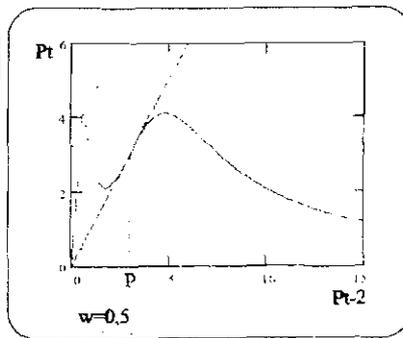


Figura N° 7

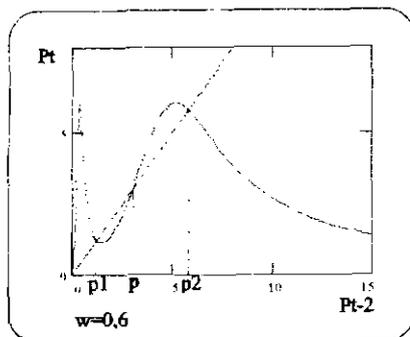


Figura N° 8

En la figura siguiente (Figura N° 7) se observa que cuando  $w$  se incrementa, la segunda "joroba" de  $f^2(P_{t-1})$  se hace más notoria y el "valle" que queda entre las dos "jorobas" se hace más profundo. En  $w=w_1$  la recta de  $45^\circ$  es tangente a la función y a su vez es el punto en que  $\bar{P}$  comienza a ser inestable surgiendo así la primera bifurcación.

Un valor mayor que  $w_1$  para  $w$  da como resultado dos puntos de intersección más entre la función de segunda iteración y la línea de  $45^\circ$  (ver Figura N° 8). El resultado va a ser que ahora el punto fijo  $\bar{P}$  será inestable y los nuevos puntos fijos  $\bar{P}_1$  y  $\bar{P}_2$ , serán los puntos de equilibrio estable en donde converjan todas las órbitas.

Podemos calcular el valor de los nuevos puntos obtenidos: supongamos que  $w=0.6$ . El mercado de equilibrio de precios terminará saltando de un equilibrio ( $\bar{P}_1 = 1,208712$ ) a otro ( $\bar{P}_2 = 5,791288$ ) con un periodo de dos ciclos. Nuevamente, la estabilidad del ciclo de periodo dos depende de la pendiente de  $f^2(P_{t-1})$  tanto en  $\bar{P}_1$  como en  $\bar{P}_2$  que es la misma. El ciclo de periodo

dos comienza a ser inestable cuando sus pendientes sean mayores que la línea de 45°; donde surge de nuevo la bifurcación en  $\tilde{P}_1$  y en  $\tilde{P}_2$ . De esta forma comienza a crearse un ciclo estable de período 4; en donde sus órbitas consisten en cuatro puntos fijos del mapa de la cuarta iteración. Esta es la forma como se van creando las distintas bifurcaciones, es decir que se generan a través de un mecanismo de período  $2^k$ . En la tabla siguiente se calcularon los valores en donde se producen las primeras bifurcaciones.

Bifurcación	w	Puntos Fijos				
1°	0,5	0	3	-1		
2°	0,61756	0	3	-1	6,13493	1,09466

Tabla N° 1

Se sabe que los valores del parámetro  $w_k$ , donde surge el ciclo  $2^k$ , convergen a un límite  $w_\infty$  en progresión geométrica. Este patrón de duplicación de períodos es universal para una amplia clase de mapas con un solo parámetro; la cual fue descubierta por Feigenbaum (1975). Es posible averiguar este límite:

$$w_\infty = \frac{\mathfrak{I} \cdot w_k - w_{k-1}}{\mathfrak{I} - 1} \quad (23)$$

donde  $\mathfrak{I}=4,669202\dots$  es la constante universal de Feigenbaum. En nuestro ejemplo se obtuvo  $w_\infty \approx 0,6496006$ . En la Figura N° 9 se muestra cómo a medida que crece el valor de  $w$  se van produciendo las distintas ramas. Además, se puede ver que en el intervalo  $(0, w_\infty]$  sólo existen bifurcaciones con ciclo de período  $2^k$ ; pero en el resto del intervalo  $(w_\infty, w_n)$  surgen o aparecen períodos pares e impares.

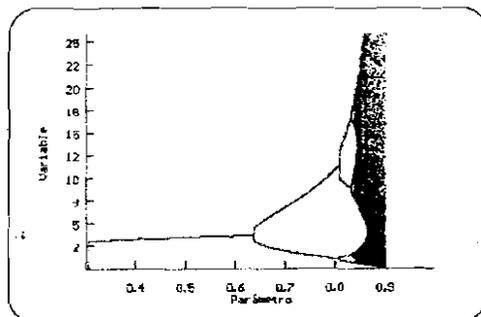


Figura N° 9

#### 4. Conclusión

En definitiva, es posible derivar cualquier clase de comportamiento periódico como comportamiento caótico desde un modelo agrícola bajo condiciones de expectativas adaptativas. Las ecuaciones tanto de demanda como de oferta postuladas en el modelo podrían haber sido sujetas a situaciones inusuales de los agentes económicos, obteniendo comportamientos más complejos pero de menor contraste real.

La introducción de una pequeña no linealidad en el modelo amplía significativamente el rango posible del comportamiento dinámico del modelo. No sólo se deben distinguir tres casos, convergencia, divergencia y oscilación en el equilibrio; sino también se deben considerar ciclos de cada período como así también movimientos aperiódicos que pueden ocurrir dentro de los límites de una región, a esto se lo denomina también *caos determinístico*. Es importante resaltar que todo el modelo se muestra más estable debido a que el caso de oscilación divergente ilimitada en los precios fue eliminada completamente. Si la intención es modelar los ajustes de precios del mercado agrícola a través de un sistema de telaraña se debe introducir un proceso adaptativo no lineal: para que la fluctuación de precios observados en el mercado pueda deberse a una amplia variedad de dinámicas posibles.

Se realizaron pruebas con otros modelos en donde se partió de funciones de oferta y demanda distintas llegándose al mismo tipo de comportamiento; aunque con una complicación matemática mayor en algunos casos. Los modelos con expectativas normales dieron en general comportamientos más estables que aquéllos con expectativas adaptativas. En la Tabla N° 2 se describen algunos de ellos.

M	Oferta	Demanda	Expectativas	M	Oferta	Demanda	Expectativas
1	Lineal	Cuadrática	Adaptativas	4	Cúbica	Lineal	Adaptativas
2	Cuadrática	Hiperbólica	Adaptativas, Normales	5	Logarítmica	Hiperbólica	Adaptativas, Normales
3	Cuadrática	Lineal	Adaptativas, Normales	6	Exponencial	Hiperbólica	Adaptativas, Normales

Tabla N° 2

La pregunta que queda es si los datos del mundo real revelan información de no linealidad determinística en estos mercados, ya sea caótica o no. En el próximo inciso trataremos de responder a esta inquietud.

### III. ¿Cómo detectar el caos en series de tiempo?

Antes de comenzar con la detección empírica del caos haremos algunas consideraciones teóricas sobre métodos que luego emplearemos.

#### A. Un concepto intuitivo

Hay una gran diferencia filosófica entre aquello que es determinístico y lo puramente estocástico. En el fondo, mientras uno más estudia los procesos aleatorios menos aleatorios parecen. Para acotar el tema, dejando de lado el problema filosófico, diremos que un proceso determinístico es aquél que tiene *dimensión baja* y un proceso aleatorio es el que tiene *dimensión alta*. Para explicar estos términos recurriremos al siguiente ejemplo: un programa de computadora genera números aleatorios independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) uniformemente en  $[0;1]$ . Luego generamos una serie relativamente grande  $\{r_t\}$ . La pregunta que nos hacemos ahora es si la serie llena el intervalo  $[0;1]$  o si se tiende a agrupar en algunos puntos de este intervalo. Si la primera parte de la pregunta es verdadera podemos decir que la serie tiene  $\text{dimensión} \geq 1$ . Pasemos a la serie  $\{(r_t, r_{t+1})\}$  y veamos si llena el cuadrado unitario  $[0;1]^2$ . Si esto ocurre, luego decimos que la serie  $r_t$  tiene  $\text{dimensión} \geq 2$ .

En general, si la serie de vector  $m$   $\{r_t^m\} \equiv \{(r_t, r_{t+1}, \dots, r_{t+m-1})\}$ , a la cual llamaremos *m-historias*, llena el cubo  $m$  dimensional  $[0;1]^m$ , se dice que la serie tiene  $\text{dimensión} \geq m$ . Un buen generador de números aleatorios debería poder llenar el cubo  $m$  dimensional para cualquier valor de  $m$ . En definitiva, para ver si una serie de tiempo  $a_t$  es generada por un sistema determinístico de *dimensión baja*, se debe probar que las *m-historias* de  $a_t$  no llenan el supercubo para un  $m$  grande.

#### B. Detección del caos en series de tiempo

Hay un gran número de definiciones sobre el tema pero no todas son aplicables a los estudios empíricos. Por otro lado, como se dijo en el inciso II, no todos los procesos de detección son aplicables a los datos económicos. Siguiendo a Brock (1986), una serie observada  $a_t$  tiene explicación determinística si existe un sistema  $(h, F, x_0)$  tal que:

$$\begin{aligned} F: \mathfrak{R}^m &\rightarrow \mathfrak{R}^m, & x_{t+1} &= F(x_t), \\ h: \mathfrak{R}^m &\rightarrow \mathfrak{R}, & a_t &= h(x_t), \end{aligned}$$

donde  $x_0$  es la condición inicial y  $x_t$  es un vector de estado que compila toda la información necesaria para determinar  $x_{t+1}$  a través de la aplicación del sistema  $F$ , que es  $n$  dimensional y determinístico. Debido a que los datos de la serie de tiempo  $a_t$  son la información que se tiene en el modelo, tanto  $F$  como  $x_t$  no necesitan ser observados. La relación que existe entre los datos  $(a_t)$  y el sistema  $(h, F, x_0)$  es un atractor.

Definamos primero a qué se lo llama atractor: Un atractor en un sistema dinámico es un conjunto de puntos a los cuales eventualmente convergen un conjunto de puntos iniciales. Formalmente decimos que:

*Definición 1:* Un conjunto compacto  $A \subset F$  es llamado atractor si existe un entorno  $U$  de  $A$  tal que para todo  $x_0 \in U$  existe  $x_t \in U$ , para algún  $t > 0$  y  $x_t \rightarrow A$  para  $t \rightarrow +\infty$ .

Un repulsor se define reemplazando  $+\infty$  por  $-\infty$  en la definición 1. Esta definición de atractores y repulsores cubre una variedad de fenómenos tales como: puntos fijos estables, ciclo límite y cotas en el movimiento caótico. La definición también cubre el caso en que el conjunto  $A$  consista en  $\pm\infty$ . Con el fin de enfatizar la limitación que tienen los movimientos económicos es útil distinguir entre atractores *finitos* e *infinitos*.

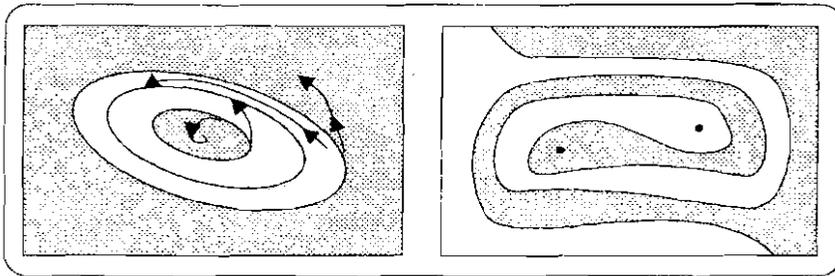


Figura N° 10

En muchos sistemas dinámicos estudiados en economía todos los puntos iniciales en un diagrama de fase entero convergen a un atractor  $A$ . Sin embargo, escenarios diferentes son típicos en modelos de economía dinámica. La Figura N° 10 muestra dos ejemplos de diagramas de fases en sistemas continuos dinámicos con un comportamiento más complicado de convergencia. Las órbitas más cercanas representadas en la parte izquierda de la Figura N° 10 visualizan ciclos límites tanto estables como inestables que pueden alcanzarse en modelos no lineales de ciclos de negocios. El punto fijo, situado

en el centro de la figura, es estable; pero sus múltiples ciclos límites son alternativamente estables e inestables. Las diferentes áreas sombreadas representan puntos iniciales que convergen hacia diferentes atractores (incluyendo  $\pm\infty$ ). La parte derecha de la Figura N° 10 muestra el caso de dos atractores, donde la línea divide el diagrama de fase en dos conjuntos de puntos iniciales que convergen a uno de ellos.

Las diferentes áreas sombreadas en ambos gráficos son ejemplos de diferentes *cuenca de atracción*. Podemos decir que la *cuenca de atracción* son el conjunto de los puntos iniciales donde sus órbitas convergen. Formalmente:

*Definición 2:* Sea  $U$  un entorno de un atractor  $A$ . La *cuenca de atracción*  $B(A)$  es el conjunto de todos los puntos iniciales  $x_0 \in U$  tal que  $x_t$  se aproxima a  $A$  a medida que  $t \rightarrow +\infty$ .

Las siguientes propiedades son específicas de un atractor:

- Es un subconjunto del diagrama de fase  $\mathcal{R}^n$  y sus dimensiones son menores que  $n$ .
- Casi todas las trayectorias (todas aquéllas que comienzan en la cuenca de atracción) son atraídas asintóticamente hacia él. Una vez que es tomada por el atractor, la órbita estará siempre dentro o cerca del atractor.
- Un conjunto de *atractores extraños* consiste en un número de puntos aperiódicos que están densamente situados en el atractor. La dinámica de estos atractores es sensible a las condiciones iniciales ya que cerca del entorno los puntos producen órbitas que aunque tienden al atractor, se separan rápidamente. Esto es lo que hace que las trayectorias caóticas parezcan erráticas. El conjunto de *atractores extraños* será generalmente un fractal con dimensión Hausdorff distinta de cero.

Por el teorema de Takens (1980), es posible reconstruir los atractores en una dimensión fija  $m$  usando la serie observada  $a_t$ . Para ello partiremos la serie en una secuencia de  $m$  historias:

$$a_{T-k}^m = (a_{T-k}, a_{T-k-1}, \dots, a_{T-k-m+1}) \text{ para } k = 0, 1, \dots, T-m.$$

Cada  $m$ -upla representa un punto en un diagrama de fase  $m$ -dimensional y la secuencia de las  $m$  historias constituye un objeto  $m$  dimensional. Este objeto reproducirá el comportamiento del verdadero sistema dinámico provisto anteriormente, de tal forma que  $m > 2n + 1$  y que además el vector  $a_i$  esté sobre un atractor.

Para estimar la dimensión de nuestra serie de tiempo observada, podemos usar el algoritmo propuesto por Grassberger y Procaccia (1983). Para ello se define el coeficiente de correlación integral:

$$C_m(\epsilon) = \frac{[\text{número de pares } (i, j) : \|a_i^m - a_j^m\| < \epsilon, i \neq j]}{N_m^2 - N_m}, \quad (24)$$

donde  $N_m = T - (m - 1)$  es el número de posibles  $m$  historias. Luego, se define el coeficiente de correlación dimensional en términos del coeficiente de correlación integral como:

$$\alpha(m) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log C_m(\epsilon)}{\log \epsilon}. \quad (25)$$

Finalmente, se obtiene el coeficiente de correlación dimensional del atractor extraño de la siguiente forma:

$$\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(m). \quad (26)$$

Varios problemas surgen con el cálculo de este coeficiente:

- En primer lugar se debe encontrar un valor razonable para  $\epsilon$ . Si  $\epsilon$  es demasiado grande obtendremos demasiados pares de puntos en el entorno, por lo que el proceso quedará expresado como de dimensión baja. Por el contrario, si tomamos un  $\epsilon$  demasiado pequeño podríamos no encontrar suficientes puntos cercanos. Por otro lado si la serie de datos tiene ruido asociado, se debe cumplir que la variación de éste es pequeña relativa a la variación de los datos.
- El número de las series de tiempo económicas aparece como un proceso de raíz unitaria<sup>5</sup> el cual puede ser también responsable de

<sup>5</sup> Ver NELSON y PLOSSER, *Trends and random walks in macroeconomic time series*, en *Journal of Monetary Economy*, Vol. 10 (Amsterdam, 1982), págs. 139/162.

estimaciones con baja dimensión. Esta situación fue descubierta por Brock (1986). Para solucionar el problema, se filtra la serie de datos por un proceso autorregresivo y luego se toma el estimador de dimensión sobre los residuos. La idea fundamental de este proceso es que los procesos caóticos son invariantes ante transformaciones lineales.

Se puede probar que existe una relación entre  $\epsilon$  y el coeficiente de correlación integral:

$$C_m(\epsilon) = k \cdot \epsilon^\alpha, \quad (27)$$

donde  $k$  es una constante y  $\alpha$  es la medida de la dimensión del atractor extraño. Tomando logaritmo y dividiendo por  $\log \epsilon$ :

$$\alpha = -\frac{\log k}{\log \epsilon} + \frac{\log C_m(\epsilon)}{\log \epsilon}. \quad (28)$$

Para estimar el valor de  $\alpha$  usamos:

$$\alpha_m \approx \frac{\log C_m(\epsilon)}{\log \epsilon}. \quad (29)$$

Este concepto es muy útil cuando  $\epsilon$  se elige tan pequeño que el primer término del miembro derecho de la ecuación (28) comienza a ser despreciable.

El objetivo del concepto de estimador es graficar  $\log C_m(\epsilon)$  contra  $\log \epsilon$  (a este tipo de gráfico se lo conoce como GP-plot). Si el movimiento de las series es caótico, la pendiente se saturará para incrementos en  $m$  y  $\epsilon$  pequeños, mientras que las señales de ruido aleatorio producen pendientes estimadas que aumentan infinitamente. Esta diferencia es la base para el análisis de los siguientes métodos.

### 1. Método N° 1: Diagnóstico Wing

Este método ha sido aplicado por Brock y Sayer (1988) y consiste en comparar el gráfico GP de la serie a analizar con una serie generada aleatoriamente con igual tamaño y varianza que la anterior. Para  $\epsilon$  grandes el gráfico GP comienza en el mismo punto ya que todas las  $m$  historias están dentro de una cierta distancia. Pero a medida que disminuimos  $\epsilon$  el estimador de di-

mensión de la serie determinística cae, con diferencias crecientes, debajo de las series pseudoaleatorias.

## 2. Método N° 2: Diagnóstico de "mezclado" (shuffle)

El diagnóstico de "mezclado" ha sido desarrollado por Scheinkman y LeBaron (1986) y consiste en comparar el gráfico de dimensión estimada de los residuos con aquéllos obtenidos por permutación aleatoria de los residuos. Es decir, que la mezcla de los números de la serie destruye cualquier orden de tal forma que las series se vuelven comparables con un proceso de ruido blanco. Si el estimador de dimensión de la *serie mezclada* es alto en comparación a la serie original, se puede sostener que existe una estructura adicional en las series. El gráfico GP de ambas series formarán nuevamente un gráfico del tipo "wings".

La ventaja de estos diagnósticos es que consideran la diferencia relativa entre el estimador de dimensión de la serie a investigar y la serie de control. En otras palabras es más conveniente este tipo de test que observar a los estimadores en términos absolutos variando a través de un rango de dimensiones y distancias  $\epsilon$  donde la elección del estimador de dimensión correcto es arbitrario.

## 3. Método N° 3: Estadístico BDS

El test BDS -Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1988)- se utiliza para datos i.i.d.; es decir, que son independientes e idénticamente distribuidos. En este caso los datos se toman como un bloque de tal forma que a través de un estadístico se pueda formular un test no paramétrico de hipótesis nula versus una amplia gama de alternativas dependientes. Bajo la hipótesis nula que la serie de datos observada es i.i.d., el test estadístico tiene asintóticamente una distribución normal estandar:

$$BDS = \sqrt{T} \frac{C_m - (C_1)^m}{b_m} \approx_{T \rightarrow \infty} N(0, 1). \quad (30)$$

La fórmula para calcular la desviación estandar  $b_m$  se puede encontrar en Brock et al. (1987). Para series de tiempo generadas aleatoriamente, la diferencia  $C_m - (C_1)^m$  en el estadístico BDS es cercana a cero. Es así que valores pequeños aceptan la hipótesis nula de series i.i.d., mientras que la presencia de no linealidad lleva a valores grandes del test estadístico. También en este

test se comparan los valores del test para la serie original y para la serie de control.

### C. Resultados Empíricos

Las herramientas de análisis introducidas en la sección anterior van a ser aplicadas a dos series de tiempo de distintos mercados:

- Precios dolarizados del mercado de vino blanco de traslado en Mendoza, VBTM (468 datos mensuales registrados desde Enero de 1956 hasta Diciembre de 1994).
- Índice Dow Jones industrial de la bolsa de valores de Nueva York, DJ (1293 datos diarios correspondientes a los años 1990 a 1994).
- Índice Merval de la bolsa de valores de Buenos Aires, Merval (777 datos diarios correspondientes a los años 1992 a 1994).

En las figuras N° 11, 12 y 13 se muestran las series.

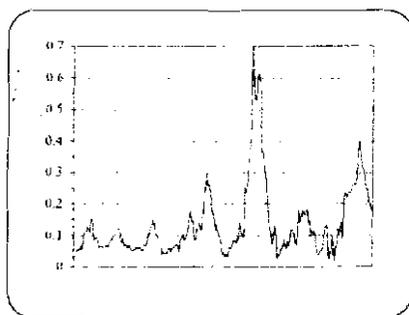


Figura N° 11: Serie VBTM

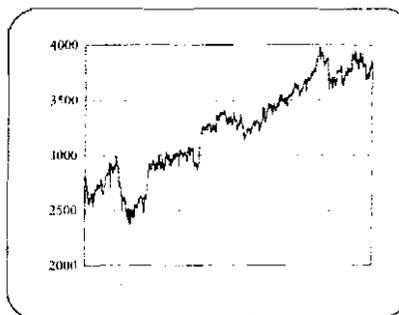


Figura N° 12: Serie DJ

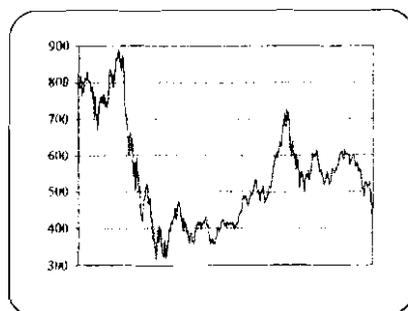


Figura N° 13: Serie Merval

Las dos últimas series (DJ y Merval) parecen estar cerca de un proceso de raíz unitaria ya que gran parte de la estructura desaparece en la autocorrelación si se filtra por un proceso AR(1) con coeficiente cercano a la unidad.<sup>6</sup> Dado que los procesos de raíz unitaria pueden producir estimadores de dimensión sesgada, filtramos las series por el método tradicional de Box-Jenkins (1976). El objetivo es remover cualquier linealidad en las series y luego analizar la dimensión de los residuos de cada una de ellas.

Filtramos a la serie del VBTM tanto por un modelo AR(2) como por un modelo AR(16) con siete coeficientes distintos de cero (Figura N° 14 y Figura N° 15, respectivamente). En las tablas N° 3 y 4 se puede observar el resultado de aplicar estos modelos autorregresivos a la serie VBTM.

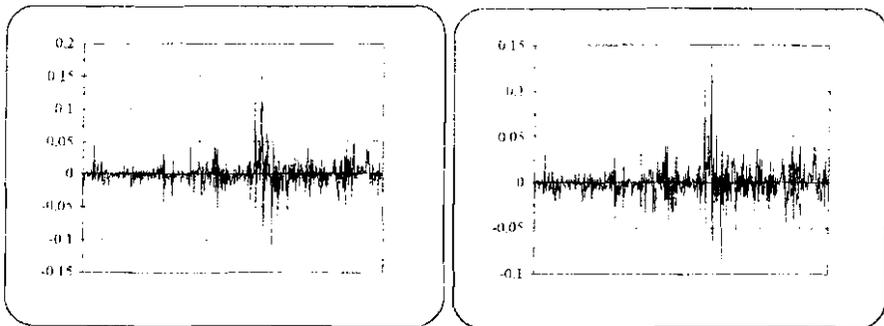


Figura N° 14: Res. AR(2) serie VBTM      Figura N° 15: Res. AR(16) serie VBTM

En las Tabla N° 5 se muestran los estadísticos de bondad del ajuste tanto para la serie VBTM-AR(2) como VBTM-AR(16). Se puede observar la mejora del estadístico AICC que pasa de un valor como -2.334,44 para la serie VBTM-AR(2) a un valor -2.365,96 para VBTM-AR(16) con una diferencia de 31,52.

Como las series DJ y Merval tienen una tendencia pronunciada se decidió realizar una primera diferenciación de sus logaritmos; obteniéndose residuos semejantes al ruido blanco (figuras N° 16 y 17).

<sup>6</sup> En general se elimina la tendencia con una diferenciación de los datos (lag=1).

Variable	Coef.	Error tip.	Estad. t
Ordenada	0.0034746	0.0014278	2.4336372
Rezago 1	1.3482176	0.0431377	31.253779
Rezago 2	-0.37205	0.0431057	-8.631111
Estadísticas de regresión			
R múltiple			0.9853892
R cuadrado			0.9709918
R cuadrado ajustado			0.9708665
Error típico			0.0198587
Observaciones			466
Análisis de varianza			
	dif.	Sum. cuad.	Med. cuad.
Regresión	2	6.1119436	3.0559718
Residual	463	0.1825929	0.0003944
Total	465	6.294536	

Tabla N° 3

Estadísticos	VB-AR(2)	VB-AR(16)
FPE	0.39437E-3	0.36793E-3
BIC	-2324.23	-2325.03
-2 Log (verosimilitud)	-2340.49	-2382.28
AICC	-2334.44	-2365.96
Var. Ruido Blanco	0.39101E-3	0.35709E-3

Tabla N° 5

Variable	Coef.	Error tip.	Estad. t
Ordenada	0.0056586	0.0015858	3.568208
Rezago 1	1.2856332	0.0445077	28.885649
Rezago 2	-0.337085	0.0494378	-6.818355
Rezago 6	0.1375327	0.0516276	2.6639379
Rezago 7	-0.19785	0.0757419	-2.612162
Rezago 8	0.1598676	0.0496018	3.2230193
Rezago 14	-0.141616	0.0310401	-4.562368
Rezago 16	0.0531384	0.028217	1.8832084
Estadísticas de regresión			
R múltiple			0.9864786
R cuadrado			0.9731401
R cuadrado ajustado			0.9727167
Error típico			0.0193414
Observaciones			452
Análisis de varianza			
	dif.	Sum. cuad.	Med. cuad.
Regresión	7	6.0176904	0.8596701
Residual	444	0.1660958	0.0003741
Total	451	6.1837862	

Tabla N° 4

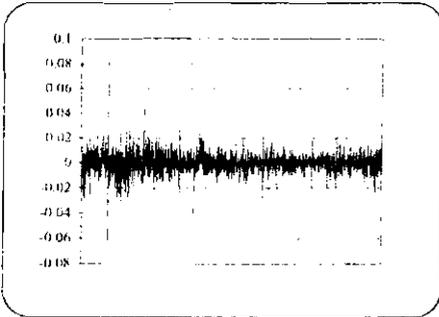


Figura N° 16. Res. dif. log. DJ

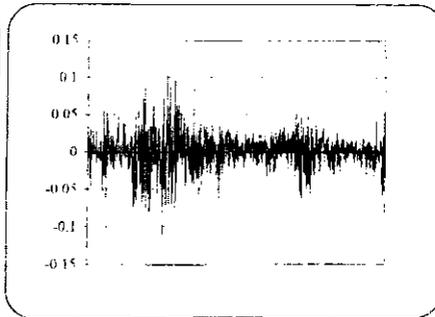


Figura N° 17: Res. dif. log. Merval.

Si se representan las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial muestrales de las series VBTM, tanto para residuos AR(2) como AR(16), DJ y Merval se observará que en los cuatro casos los residuos aparecen como cercanos a un proceso de ruido blanco.

Los gráficos GP se visualizan en las figuras N° 18, 19, 20 y 21.

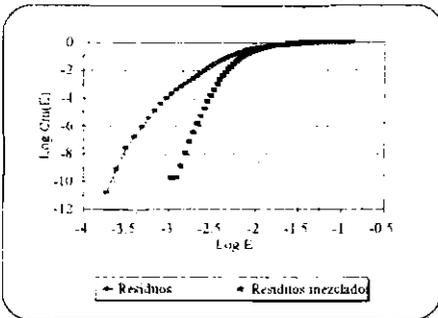


Figura N° 18: GP AR(2) VBTM,  $m=25$

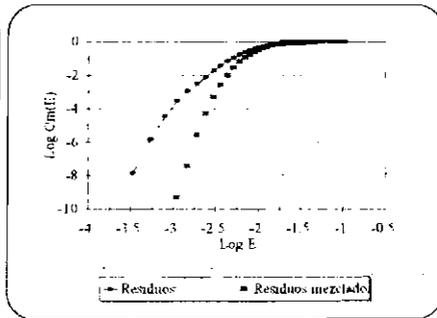


Figura N° 19: GP AR(16) VBTM,  $m=25$

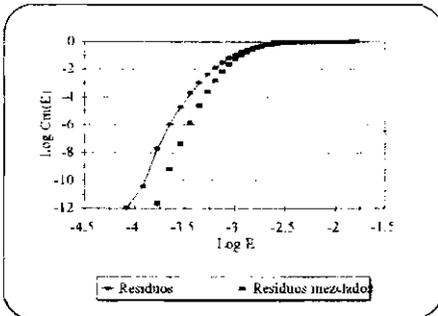


Figura N° 20: Res. dif. log. DJ,  $m=25$

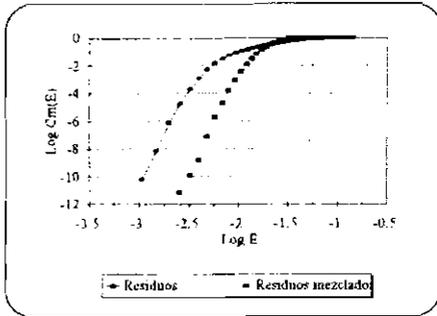


Figura N° 21: Res. dif. log. Merval,  $m=25$

Las dimensiones estimadas de los residuos son bajas en comparación a las series *mezcladas*. Además las pendientes en ambos gráficos GP de las series de control son mayores que de las series de datos observadas. Resultado de ello es el tipo de figura, semejante a un ala, que quedan representadas en las figuras N° 18, 19, 20 y 21. En consecuencia hay aún una estructura que no ha sido removida de la serie.

<i>m</i>	Pares	BDS	Serie	<i>T</i>	<i>m</i>	Pares	BDS	Serie	<i>T</i>
2	38.634	1,94271	VBTM-AR(2)	466	3	15.244	-6.822251	MERVAL	776
3	16.872	2,07658	VBTM-AR(2)	466	2	55.026	-7.532095	MERVAL-AR(3)	773
2	31.310	1,07884	VBTM-AR(16)	452	3	15.190	-7.837931	MERVAL-AR(3)	773
3	12.108	1,14948	VBTM-AR(16)	452	2	1.508	77.737857	LOGISTICA	100
2	161.030	-14,70845	DJ	1.292	3	768	94.73053	LOGISTICA	100
3	38.910	-15,24669	DJ	1.292	2	540	0.4647949	ALEATORIA	100
2	54.762	-6,67473	MERVAL	776	3	84	0.7609268	ALEATORIA	100

Tabla N° 6

Los tests anteriores tienen la desventaja de no informar cuán grande es la dispersión con el objeto de ser estadísticamente significativo. En la Tabla N° 6 se muestra el estadístico BDS para las series VBTM-AR(2), VBTM-AR(16), DJ, MERVAL y MERVAL-AR(3)<sup>7</sup> con valores de  $e$  igual a la mitad de la desviación estándar de los datos. También se han agregado dos series *opuestas*<sup>8</sup>: logística y aleatoria (ambas simuladas).

En la tabla anterior se observa que en las series DJ, MERVAL y MERVAL-AR(3) hay evidencia de no linealidad ya que los valores del estadístico BDS son superiores a 1,96 para un 95% de confianza. En la serie VBTM-AR(2) el estadístico BDS indica que existe una estructura por remover. Al aplicar un proceso AR(16) a la serie VBTM esta estructura desaparece completamente quedando sólo un residuo aleatorio. De la misma forma se probaron otros modelos para la serie DJ sin poder llegar a explicar mejor la estructura no aleatoria.

<sup>7</sup> Donde MERVAL-AR(3) es la serie de residuos luego de aplicar un proceso AR(3) a los logaritmos de la primer diferenciación de la serie MERVAL.

<sup>8</sup> Opuesta en el sentido de que ambas series son extremos en el análisis; una por ser caótica determinística y otra por ser puramente estocástica.

En definitiva, podemos afirmar que hay evidencias de no linealidad tanto en la serie DJ como Merval y no de una mala especificación en el modelo, mientras que podemos estar seguros que la serie VBTM no presenta caos determinístico por no haber una estructura no lineal en los datos.

## VI. Conclusiones

La búsqueda de evidencias de caos determinístico (de baja dimensión) en datos económicos, nos ha dado suficientes motivos para pensar que no existe no linealidad en el mercado del vino blanco de traslado en Mendoza, sin embargo no ocurre lo mismo en los mercados de valores de Nueva York y Buenos Aires.

El comportamiento en el mercado del vino blanco en Mendoza se puede deber principalmente a la existencia de dos factores: la existencia de un gobierno provincial intervencionista con distintas políticas económicas (cupos, subsidios, etc.) y los efectos importantes que tiene el clima en la producción de la materia prima. Si bien podemos considerar al clima como un factor más caótico que estocástico, los efectos que produce el gobierno parecerían que fueran más aleatorios que determinísticos.

No ocurre lo mismo en los mercados de valores analizados ya que la *pureza* del mercado, en el sentido de no existir casi intervenciones en el mismo, hace que exista la posibilidad de un comportamiento caótico determinístico.

Ya sea en forma teórica, como se mostró en el inciso II, como en forma empírica (inciso III) es posible afirmar la presencia de caos determinístico en datos económicos. Debido a que los métodos sólo nos anuncian la presencia de no linealidad en los datos sin decirnos si en realidad existe o no un comportamiento caótico en ellos, la pregunta que queda pendiente es: ¿para qué nos sirve saber si existe una estructura no lineal? Dos posibles respuestas se pueden presentar.

En primer lugar fuertes evidencias de no linealidad en los datos implican que el modelo debe ser estimado mejor. En segundo lugar la evidencia de no linealidad en los datos ayudan a que se creen nuevos métodos estadísticos que nos ayuden a estimar esta estructura. De la misma forma en que coeficientes no significativos de un proceso autorregresivo de orden 1 nos van a

hacer pensar que un rezago mayor tampoco va a ajustar. La existencia de no linealidad nos hace pensar que existe aún una estructura por remover en la serie.

## BIBLIOGRAFIA

- BARNETT, William A. y CHEN, P., *The aggregation-theoretic monetary aggregates are chaotic and have strange attractors. An econometric application of mathematical chaos*, en *Dynamic Econometric Model, Proc. 3rd. Int. Symp. on Economic Theory and Econometrics*, cd. W. A. Barnett, E. Berndt y H. White (Cambridge, 1988), 47 págs.
- BARNETT, William A. y HINCH, Melvin J., *Empirical chaotic dynamics in economics*, en *Annals of Operations Research*, Nº 37, Vol. 1-15 (Basel, 1992), 15 págs.
- BEKER, Victor A., *Economic Nonequilibrium, Instability and Chaos*, en XXIX Reunión anual de la Asociación Argentina de Economía Política, FCE-Universidad Nacional de La Plata, Tomo 2 (La Plata, 1994), 19 págs.
- , *Per una teoria economica del non-equilibrio*, en *Note Economiche*, Nº 1 (1994), 14 págs.
- BROCK, William A., *Distinguishing random and deterministic systems: abridged version*, en *Journal of Economic Theory*, Vol. 40 (Amsterdam, 1986), 27 págs.
- BROCK, William A. y DECHERT, Davis W., *Non-linear dynamical systems: instability and chaos in economics*, en *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 4 (Amsterdam, 1991), 26 págs.
- BROCK, William A. y MALLIARIS, A., *Differential equations, stability and chaos in dynamic economics* (Amsterdam, Elsevier, 1989), 389 págs.
- BROCK, William A. y SAYERS, Chera L., *Is the business cycle characterized by deterministic chaos?*, en *Journal of Monetary Economics*, Vol. 22 (Amsterdam, 1988), 20 págs.
- FINKENSTÄDT, Bärbel y KUHBIER, Peter, *Chaotic Dynamics in Agricultural Markets*, en *Annals of Operations Research*, Vol. 37, Nº 2 (Basel, 1992), 24 págs.
- , *Principal components and overall sphericity: An application to chaotic time series*, en *Dynamic Economic Models and Optimal Control*, ed. G. Fiechtinger (Amsterdam, 1992), 20 págs.
- GHEZZI, Luca Luigi, *Bifurcations in stock market model*, en *Systems & Control Letters*, Vol. 19 (Amsterdam, 1992), 8 págs.
- GRASSBERGER, P. y PROCACCIA, I., *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*, en *Physica*, Vol. 9D (1983), 19 págs.
- HOMMES, Cars H., *Cobwebs, chaos and bifurcations*, en *Annals of Operations Research*, Vol. 37, Nº 2 (Basel, 1992), 4 págs.

- , *Dynamics of the cobweb model with adaptative expectations and nonlinear supply and demand*, en *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 24 (Amsterdam, 1994), 20 págs.
- , *Periodic, quasi-periodic and chaotic dynamics in a simple macro model with hicksian nonlinearities*, en *Dynamic Economic Models and Optimal Control*, ed. G. Feichtinger (Amsterdam, 1992), 26 págs.
- LORENZ, Hans-Walter, *Multiple attractors, complex basin boundaries, and transient motions in deterministic economic systems*, en *Dynamic Economic Models and Optimal Control*, ed. G. Feichtinger (Amsterdam, 1992), 20 págs.
- NELSON y PLOSSER, *Trends and random walks in macroeconomic time series*, en *Journal of Monetary Economy*, Vol. 10 (Amsterdam 1982), 23 págs
- NERLOVE, M., *Adaptative expectations and cobweb phenomena*, en *Journal of Economics*, Vol. 72 (Amsterdam, 1958), 13 págs.
- PEITGEN, Heinz-Otto, JÜRGENS, Hartmut y SAUPE, Dietmar, *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science* (New York, Springer-Verlag, 1992), 984 págs.
- SCHEINKMAN, José y LEBARON, B., *Nonlinear dynamics and stock returns*, Mimco, University of Chicago, (Chicago, 1986).
- TAKENS, F., *Detecting Strange Attractors in Turbulence*, en *Dynamical Systems and Turbulence*, ed. D. Rand y L. Young, Lecture Notes in Mathematics Nº 898 (Berlín, Springer, 1980), 366 págs.
- WEISS, Michael D., *Nonlinear and chaotic dynamics: An economist's guide*, en *The Journal of Agricultural Economics Research*, Vol. 13, Nº 2 (1991), 16 págs.